

ИЮЛЬ/АВГУСТ

ISSN 0130-2221

1995 · №4

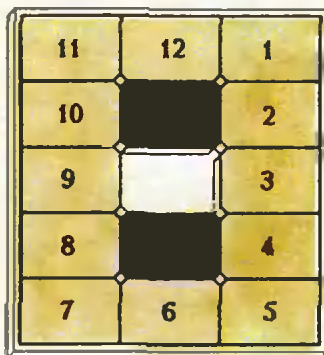
# КВАНТ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ



## КОЛЛЕКЦИЯ ГОЛОВОЛОМОК

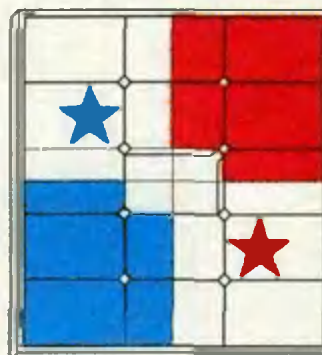
"12"



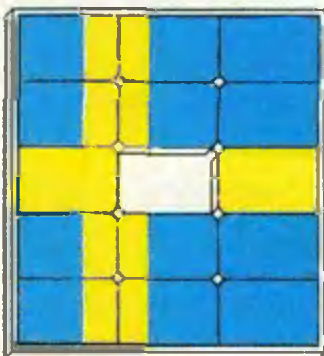
Франция



Панама



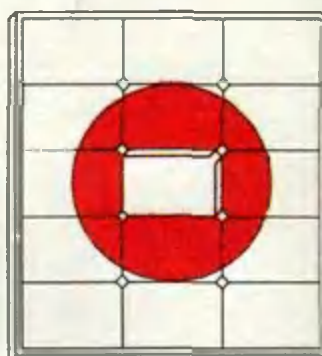
Швеция



Германия



Япония



## ГОЛОВОЛОМКИ ВЛАДИМИРА КРАСНОУХОВА

Серию игрушек, показанную на наших рисунках, придумал известный изобретатель головоломок Владимир Красноухов. Конструкция всех шести головоломок одна и та же, но раскраска подобрана так, что фактически вы имеете дело с шестью игрушками разной сложности.

В каждой квадратной коробочке находится 14 прямоугольных фишек, две из которых (средние во втором и четвертом рядах) приклеены ко дну коробки, а остальные 12 могут перемешаться за счет свободной ячейки в центре. Вынимать фишки не разрешается. В начале игры произвольно перемещают фишки, а затем требуется восстановить первоначальный рисунок.

В качестве рисунков использованы флаги 5 государств, хотя и в несколько измененной пропорции. Головоломка с национальными цветами Франции — самая простая. Дело в том, что в этом варианте только три типа фишек: 5 синих, 5 красных и 2 белых. В головоломке со шведским флагом — 4 типа фишек, с немецким — 5, с японским — 7, с панамским — 9 и, соответственно, возрастает трудность их решения. В головоломках с флагами вы можете перед игрой высыпать все фишки из коробочки, затем произвольно уложить их обратно и решать головоломку. В любом случае задача будет иметь решение. Не так обстоит дело с первой головоломкой,

в которой 12 фишек пронумерованы. В ней, при произвольной укладке, только в половине случаев решение существует (так же, как в известной вам игре «15»). При перемещении фишек с использованием одной свободной ячейки можно поменять местами не менее двух пар фишек. Например, невозможно поменять фишки 1 и 2. Другие вернулись на свои места. Это свойство называется четностью перестановок. Конечно, закон четности действует и в головоломках с флагами. Но в них перестановка двух одинаково окрашенных фишек незаметна для глаз, и часто возникают ситуации, когда кажется, что удалось поменять местами две фишки. В самом деле переставлено было не менее четырех. Между прочим, решить «панамскую» головоломку можно и без нумерованных фишек. Чем первую, с пронумерованными фишками. Когда все фишки различны, легче следить за порядком их перемещения и алгоритм решения головоломок.

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

ИЮЛЬ/АВГУСТ · 1995 · № 4

В номере:

- 2 Христиан Гюйгенс. *Ю. Соловьев*  
5 Об одной формуле Гюйгенса. *В. Вавилов*  
10 Звездная aberrация и теория относительности.  
*Б. Гиммельфарб*  
15 Размышления физика-альпиниста. *Дж. Вайли*

## ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 19 Этьен Малюс и его открытие. *А. Андреев*

## ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 24 Задачи М1501—М1510, Ф1508—Ф1517  
25 Решения задач М1471—М1480, Ф1488—Ф1497

## КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

- 32 Магические квадраты

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 37 Задачи  
37 «И вспышки молний тьмв глотала, и небо долго  
грохотало...». *С. Тихомирова*

## ШКОЛА В «КВАНТЕ»

- 44 Геометрическое место точек. *А. Савин*

## ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

- 46 Замерзающая лужа. *А. Миранский, А. Шапиро*

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 48 Соударение тел. *В. Козлов*

## ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

- 52 Геометрическая оптика. *Ю. Чешев*  
55 Контроль геометрических решений. *Л. Штернберг*

## ОЛИМПИАДЫ

- 57 Задачи LVIII Московской математической олимпиады  
58 Избранные задачи Московской физической олимпиады

- 40 Информация

- 60 Ответы, указания, решения

## НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация В. Хлебниковой-Митурич к статье  
Ю. Соловьева «Христиан Гюйгенс»*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*

**Квант**

Учредители — Президиум РАН,  
НПП «Бюро Квантум»  
Издатель — НПП «Бюро Квантум»

### ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Ю.А.Осипьян

### ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

С.П.Новиков

### РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Ю.М.Брук, А.А.Варламов,  
Н.Б.Васильев, А.Н.Виленькин,  
С.А.Гордюнин, Н.П.Долбиллин,  
В.Н.Дубровский,  
А.А.Егоров, А.Р.Зильберман,  
С.С.Кротов

(директор «Бюро Квантум»),

А.А.Леонович, Ю.П.Лысов,  
В.В.Можаев,

Н.Х.Розов, А.П.Савин,

Ю.П.Соловьев, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров

(заместитель главного редактора),

В.А.Тихомирова, В.М.Уроев,  
А.И.Черноуцан

(заместитель главного редактора),

И.Ф.Шарыгин

### РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

А.В.Анджанс, В.И.Арнольд,  
М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой,  
Ю.А.Данилов, Н.Н.Константинов,  
Г.Л.Коткин,  
Е.Л.Сурков, Л.Д.Фаддеев,  
А.И.Шапиро

Бюро  Квантум

©1995, «Бюро Квантум», «Квант»

# Христиан Гюйгенс

(1629—1695)

Ю. СОЛОВЬЕВ

**В** ИЮНЕ этого года исполнилось 300 лет со дня смерти гениального голландского математика, физика и астронома Христиана Гюйгенса. Многие из его научных открытий не потеряли своего значения до настоящего времени.

Христиан Гюйгенс (Хейгенс — по голландскому произношению) родился в Гааге 14 апреля 1629 года. Отец его, Константин Гюйгенс, был очень образованным человеком, выдающимся поэтом своего времени и влиятельным государственным деятелем. Некоторое время он занимал должность председателя Государственного совета Соединенных Провинций Нидерландов, как тогда называли Голландию.

Своему отцу Гюйгенс обязан первыми сведениями в области точных наук. Уже с ранних лет Христиан проявил исключительные способности к математике. В тринадцать лет он уже знал многое из тогдашней механики и увлекся конструированием различных механизмов. Пятнадцати лет он приступил в серьезному изучению математики под руководством бельгийского ученого Стампиуса.

Шестнадцати лет Христиан поступил в Лейденский университет, где по желанию отца изучал юридические науки. Кроме того, он не прекращал и занятый по математике, которыми руководил один из крупнейших голландских математиков того времени профессор ван Схоутен. В 1651 году в возрасте 22 лет Гюйгенс смог написать свой первый трактат по математике — «О квадратуре гиперболы, эллипса и круга» (т.е. о вычислении площадей этих фигур), поставивший его в ряд лучших математиков своего времени.

Окончив Лейденский университет, Гюйгенс уехал вместе с братом во Францию и поступил в Анжерский протестантский университет, где в 1655 году защитил диссертацию на степень доктора прав. Возвратившись затем в Голландию,

он не стал заниматься юриспруденцией, а увлекся шлифовкой оптических стекол для астрономических труб. Главным его интересом стала астрономия, которая в то время делала крупные успехи благодаря применению для наблюдений телескопов.

С помощью изобретенной им машины для шлифовки стекол Гюйгенсу удалось построить телескопы со значительным увеличением. Один из объективов его телескопа хранится сейчас в физическом кабинете в Утрехте. На краю его рукой Гюйгенса при помощи алмаза написано: «Приближать к глазам нашим отдаленные светила. 3 февраля 1665 г.» Стекло это окрашено в синевато-зеленый цвет и имеет в своей массе много мелких пузырьков воздуха. В это время даже в Голландии еще не умели изготавливать достаточно прозрачные стекла.

Телескопы Гюйгенса превосходили по качеству все тогда существовавшие. Используя эти уникальные приборы, Гюйгенс весной 1655 года открыл спутник Сатурна. В своем мемуаре «О луне Сатурна», опубликованном в 1656 году, он пишет:

«Двадцать пятого марта 1655 г., наблюдая Сатурн в диоптрическую трубу в 12 футов (3,6 м), я заметил по сю сторону кольца Сатурна на западе и на расстоянии трех скрупулов (минут) звездочку, лежащую в плоскости кольца Сатурна. У меня явилась мысль, что эта звездочка легко может оказаться небесным светилом вроде четырех лун Юпитера, и я отметил взаимное положение ее и Сатурна. Я не ошибся: на другой день звездочка передвинулась, а наблюдения последующих дней дали возможность определить ее положение в каждый момент.»

Так был открыт первый из спутников Сатурна, позже названный Титаном.

Кроме того, в системе Сатурна Гюйгенс открыл его «кольцо». Планету Сатурн изучали и Галилей, и немецкий астроном Гевелий (в про-

должение 15 лет). Галилей пришел к заключению, что эта планета состоит из трех тел. Гевелий считал, что Сатурн — круглая планета, охваченная двумя лунами. И только Гюйгенс установил, что Сатурн окружен плоским кольцом, которое свободно висит над экватором. Свое открытие он опубликовал в 1656 г. в виде анаграммы (так называют перестановку букв, посредством которых можно составить фразу):  
aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiii, IIII, mmm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, r, s, ttttt, uuuuu.

К анаграммам прибегали, чтобы скрыть существо открытия, сохраняя его приоритет. Из этих букв можно составить фразу:

«Annulo cingitur tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato».

В переводе на русский язык это значит: «Он (т.е. Сатурн) окружен кольцом, тонким, плоским, нигде к нему не прикасающимся, наклоненным к эклиптике». Расшифровку этой анаграммы Гюйгенс опубликовал в трактате «Система Сатурна» в 1659 г.

Наряду с астрономией Гюйгенс продолжает интересоваться чистой математикой. В 1655 году вышло в свет его большое исследование «О величине круга», представляющее собой первый после Архимеда новый подход к вычислению числа  $\pi$ . Гюйгенс нашел число  $\pi$  с 14 значащими цифрами, замечая при этом, что если бы он вместо своего метода пользовался методом Архимеда, то ему пришлось бы вычислить правильный многоугольник с 20 000 сторон.

В 1656 году появился мемуар Гюйгенса «О расчетах при игре в кости», положивший начало научному построению теории вероятностей.

В 1656—1657 гг. Гюйгенс, по выражению его биографа Гравезанда, первым из смертных точно измерил время. Им были построены первые маятниковые часы, на которые он

взял в Голландии патент. Гюйгенс сразу же приспособил часы к морскому делу — к определению долготы на море.

Справедливости ради стоит отметить, что в этом изобретении у Гюйгенса был великий предшественник — Галилео Галилей. В 1641 году он начал конструктивную разработку маятниковых часов, идея которых относится, по-видимому, еще к 1636 году. Об этом эпизоде жизни Галилея рассказывает его ученик и близкий друг Вивини.

20 августа 1659 года в письме к герцогу Леопольду Тосканскому он сообщил подробности, связанные с изобретением Галилея. «В один из дней 1641 года, когда я находился на вилле Арчетри, — писал Вивини, — Галилей поделился со мной своими мыслями о возможности присоединить маятник к часам, приводимый в движение грузом или пружиной, и что маятник, как точный регулятор хода часов, может корректировать до известной степени действие на ход несовершенств механической конструкции. Но, будучи лишен зрения и уже слаб для того, чтобы выполнить план, созревший в его го-

лове, Галилей ознакомил со своими мыслями сына Винченцо в один из его приездов в Арчетри из Флоренции. Решено было сразу приступить к делу, но через несколько месяцев Галилей заболел и 8 января 1642 года умер. После этого события у Винченцо пропал энтузиазм к выполнению модели часов, и только в апреле 1649 года он стал работать над ее созданием согласно концепции своего отца, сообщенной ему в моем присутствии... Винченцо Галилей нанял молодого слесаря, который имел некоторый опыт в создании больших стенных часов. Он заставил его сделать железную раму, колеса и их оси и оборотные колеса, но без нарезания зубцов. Всю

оставшую работу по изготовлению часов Винченцо выполнил собственными руками».

Винченцо ненадолго пережил отца: он скончался 16 мая 1649 года от острого приступа нервно-психического заболевания. В бреду он уничтожил большое количество ча-



сов, или, по словам Вивини, «остановил их ход навечно»; по-видимому, пострадала и модель маятниковых часов, созданная его руками. Все, что осталось от трудов Винченцо и что пережило Галилеев — отца и сына, — это чертежи конструкции их маятниковых часов.

Изобретение Галилеем маятниковых часов держалось в строгой тайне, о нем даже не сообщалось в биографии Галилея, написанной Вивини. Последний счел возможным сообщить о часах лишь после того, как стало известно об изобретении маятниковых часов Гюйгенсом. Сам Гюйгенс узнал о маятниковых часах Галилея лишь в 1660 году. Устройство их, более слож-

ное, чем его собственное, Гюйгенс находил замечательным и воздавал должное таланту Галилея.

В 1660 году Гюйгенс сделал важное открытие в области механики, впервые дав правильную формулировку закона упругого удара тела.

Благодаря изобретению маятниковых часов и, главным образом, открытиям по астрономии имя Христиана Гюйгенса становится известным во всей Европе. В 1663 году Гюйгенс избирается членом Королевского общества в Лондоне. Вскоре после этого произошло важное событие в жизни Гюйгенса. Министр Людовика XIV Жан-Батист Кольбер пригласил Гюйгенса в Париж, в только что основанную Королевскую академию наук. В Париже Гюйгенс пробыл 15 лет с 1666 года до 1681 года и выполнил за это время много прекрасных работ. К парижскому периоду относится выход в свет его исследования под названием «Маятниковые часы» (1673 г.) — одной из замечательнейших книг по механике, предшествовавшей появлению «Математических начал» Ньютона. К парижскому периоду относится также написание Гюйгенсом «Трактата о свете» и «Рассуждений о причине тяготения», хотя обе эти работы появились в печати лишь в 1690 году.

В «Маятниковых часах» гений Гюйгенса проявился особенно ярко. Содержание мемуара гораздо шире его названия. В книге содержится много различных открытий и изобретений в разнообразных областях математики, физики и механики. Чтобы оценить обилие этих открытий, достаточно перечислить лишь главнейшие из них. Это изобретение обыкновенных маятниковых часов, изобретение часов с коническим маятником, открытие свойств циклоидального маятника, обладающего независящим от амплитуды перио-



a  
a a a  
a a a c c c  
c c d e e e e e  
g h i i i i i i l l l l  
m m n n n n n n n n  
n o o o o p p q r  
s t t t t t  
u u u u  
u

дом, создание учения об эволютах и эвольвентах, представляющего важную главу в современной дифференциальной геометрии.

Все эти многочисленные открытия носят, однако, только подготовительный характер к содержанию центральной части мемуара, посвященной теории физического маятника.

Наиболее интересен основной принцип, который Гюйгенс положил в основу своей теории. По существу, это первая достаточно общая формулировка закона сохранения энергии в механике. Вот как сам Гюйгенс формулирует этот принцип:

«Если любое число весомых тел приходит в движение благодаря их тяжести, то общий центр тяжести этих тел не может подняться выше, чем он был в начале движения».

Комментируя указанный принцип, Гюйгенс подчеркивает его эвристическое значение и замечает, что с помощью этой гипотезы можно доказать много теорем механики. «И если бы, — пишет он, — изобретатели новых машин, напрасно пытающиеся построить вечный двигатель, пользовались этой моей гипотезой, то они легко бы сами осознали свою ошибку и поняли, что такой двигатель нельзя построить механическими средствами.»

Книга Гюйгенса «Маятниковые часы» очень быстро обрела известность и заслужила всеобщее признание. Ньютон, познакомившись с книгой, назвал ее превосходной, так как он нашел в ней много тонких и полезных рассуждений, вполне достойных ее автора. Столь же хвалебны были и отзывы других выдающихся современников Гюйгенса.

К парижскому периоду относится и создание Гюйгенсом теории оптических явлений. Основные результаты своих исследований Гюйгенс впервые изложил перед членами Парижской Академии наук еще в 1678 году. В 1690 году он выпустил свой знаменитый «Трактат о свете», где подробно развил волновую теорию оптических явлений. Подобно Декарту и Гуку Гюйгенс рассматривал свет как движение особой среды — эфира.

«Не может быть сомнения, — пишет Гюйгенс, — что свет состо-

ит из движения какой-то материи. Если рассматривать действия, им производимые, то можно заметить, что когда свет собран вместе, с помощью, например, зеркал, он обладает свойством сжигать, как огонь, т.е. он разъединяет отдельные части тел; последнее служит убедительным признаком движения».

«Свет заключается, — продолжает Гюйгенс, — в движении вещества, которое находится между нами и светящимся телом... Если принять во внимание чрезвычайную быстроту, с которой распространяется свет во все стороны, а также и то, что когда он приходит из различных и даже противоположных мест, лучи его проходят один через другой, не мешая друг другу, то станет совершенно понятно, что когда мы видим светящийся предмет, это не может происходить вследствие переноса материи, которая доходит до нас от этого предмета наподобие пули или стрелы, пересекающих воздух. Это слишком противоречит указанным двум свойствам света, в особенности второму. Значит, свет распространяется другим образом. Привесть нас к пониманию способа распространения света может то, что нам известно о распространении звука в воздухе».

Рассматривая звуковые явления как физический образ, помогающий уяснить себе процесс распространения света, Гюйгенс указывает и различие между звуком и светом. «Но если в отношении движения свет и звук сходны, — пишет он, — то во многих других отношениях они различны... В самом деле, известно, что возбуждение звука производится внезапным сотрясением всего тела или значительной его части, что возмущает весь смежный с ним воздух. Но движение света должно зарождаться от каждой точки светящегося тела.»

Механизм движения света Гюйгенс представляет следующим образом. Свет распространяется в тонкой среде — эфире, которая заполняет все мировое пространство и поры тел. Этот эфир состоит из мельчайших упругих шариков. Распространение света — процесс распространения малых движений от

шарика к шарика — подобно распространяющемуся импульсу вдоль стальных шаров, соприкасающихся друг с другом и вытянутых в одну линию. Объясняя механизм распространения импульса в эфире, Гюйгенс выдвинул принцип, носящий его имя. Он формулирует его так: «По поводу процесса образования этих волн следует еще отметить, что каждая частица вещества, в котором распространяется волна, должна сообщать свое движение не только ближайшей частице, лежащей на проведенной от светящейся точки прямой, но необходимо сообщает его также и всем другим частицам, которые касаются ее и прелятьствуют ее движению. Таким образом вокруг каждой частицы должна образовываться волна, центром которой она является».

Применение этого принципа дало возможность Гюйгенсу объяснить с точки зрения волновой теории прямолинейное распространение света, законы отражения и преломления.

Парижский период жизни Гюйгенса окончился в 1681 году. В связи с начавшимся во Франции гонением на протестантов он в знак протеста покидает Париж, несмотря на то, что король Людовик XIV уговаривал его остаться.

В то время из Франции уехали многие выдающиеся ученые. Кроме Гюйгенса, Парижскую академию оставили также знаменитый физик Папен и астроном Рёмер.

Остальную часть своей жизни Гюйгенс провел на родине, в Гааге, в запыляемых научных исследованиях. Он умер 8 июня 1695 года в возрасте 66 лет. Его научное наследие составляет одиннадцать увесистых томов.

Несомненно, Гюйгенс был крупнейшим ученым своего времени. Но, кроме того, он был человеком конкретным образа мышления. Его первый биограф, Гравезанд, писал, что Гюйгенс, всю жизнь занимаясь математическими науками, не столько был занят отвлеченными рассуждениями, сколько выявлением всего, что служит непосредственно на пользу людям.

# Об одной формуле Гюйгенса

В. ВАВИЛОВ

**Д**ЛИНА окружности радиусом  $1/2$  может быть определена как предел последовательности длин периметров правильных многоугольников, вписанных в данную окружность при неограниченном увеличении числа его сторон. Определенное таким образом число обозначается символом  $\pi$ . Аналогично можно определить число  $\pi$  и как предел периметров правильных описанных около этой окружности многоугольников (рис. 1). Точнее, если через  $p_n$  обозна-

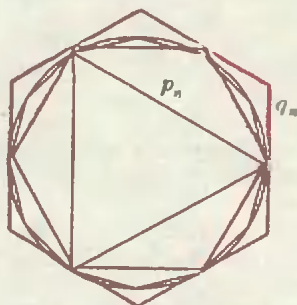


Рис. 1

чить периметр вписанного, а через  $q_n$  — периметр описанного правильного  $n$ -угольника, то имеют место неравенства

$$p_n < \pi < q_n, \quad n \geq 3.$$

Когда  $n$  возрастает, обе последовательности  $p_n$  и  $q_n$  монотонно приближаются к числу  $\pi$  (рис. 2); при переходе от  $n$  к  $n+1$  мы получаем меньшую ошибку в приближениях, которую числа  $p_n$  и  $q_n$  дают для числа  $\pi$ .

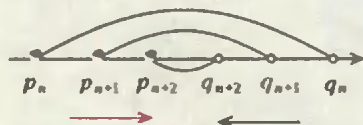


Рис. 2

В своем знаменитом сочинении «Измерение круга» Архимед (287—212 до

н.э.) дал следующее приближение для числа  $\pi$ :

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}.$$

т.е.

$$3,14084507 < \pi < 3,14285714.$$

Этот результат Архимед получил при помощи вычисления периметра правильного вписанного 96-угольника.

Многовековая история числа  $\pi$  связана с многими именами известных математиков. Один из последователей Архимеда в этом вопросе Христиан Гюйгенс (1629—1695) в 25-летнем возрасте получил совершенно неожиданный результат: приближение, указанное Архимедом для числа  $\pi$ , можно получить из рассмотрения периметров правильных 12-угольников. Этот результат Гюйгенс опубликовал в своей работе «О величине круга». Не нужно, однако, думать, что Гюйгенс добился этого только за счет уточнения самой техники вычисления периметров правильных многоугольников. В основе его работы лежали новые идеи, получившие в наше время дальнейшее развитие. Основную идею Гюйгенса можно сформулировать следующим образом. Так как  $p_n < \pi < q_n$ , при каждом  $n \geq 3$  число  $\pi$  находится внутри интервала  $(p_n, q_n)$ , причем  $q_n - p_n \rightarrow 0$ , когда  $n \rightarrow \infty$ . Разделим этот интервал при каждом  $n \geq 3$  на три равные части (рис. 3). Будет ли число

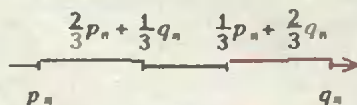


Рис. 3

$\pi$  находится в какой-то одной из этих трех частей? Оказывается (это и есть один из основных результатов работы), что число  $\pi$  всегда находится в левом интервале, т.е. при любом  $n \geq 3$  имеем

$$p_n < \pi < \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n. \quad (1)$$

Именно это основное неравенство и позволило Гюйгенсу пойти дальше Архимеда.

Ниже мы докажем приведенные результаты Архимеда и Гюйгенса и рассмотрим некоторые смежные вопросы.

## Доказательство основного неравенства

Доказательство неравенства (1) мы разобьем на несколько шагов. Левую часть этого неравенства будем считать известной и поэтому докажем только справедливость второго неравенства.

1°. Если в некоторый сегмент круга  $ACB$  вписан равнобедренный треугольник  $ABC$  и в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  проведены касательные к окружности так, как показано на рисунке 4, то

$$S_{ABC} < 2S_{KLM}. \quad (2)$$

Действительно, из соотношений  $KL > LC$  и  $LC = AL$  следует  $AK < 2KL$ . Так как треугольники  $KLM$  и

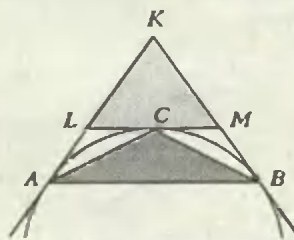


Рис. 4

$KAB$  подобны, их площади относятся как квадраты соответствующих сторон и, следовательно,

$$S_{KAB}/S_{KLM} = KA^2/KL^2 < 4,$$

откуда  $S_{KAB} < 4S_{KLM}$ .

С другой стороны, равнобедренные треугольники  $KAB$  и  $ABC$  имеют общее основание  $AB$ , и поэтому их площади относятся так же, как их высоты, или (по теореме Фалеса) как длины соответствующих сторон. Следовательно,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{KAB}} = \frac{AL}{AK}.$$

и, так как  $AL < (\sqrt{2})AK$ , получаем  $S_{ABC} < (\sqrt{2})S_{KAB}$ .

Эта статья была опубликована в «Кванте» № 11 за 1985 год.



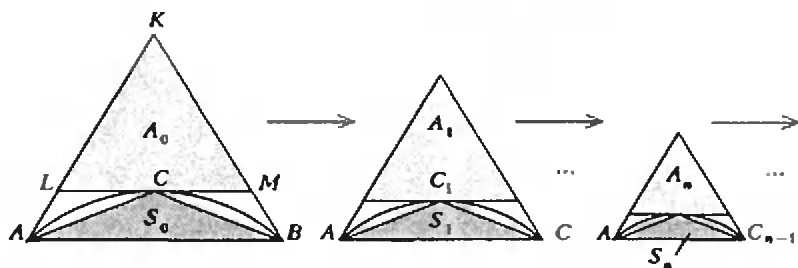


Рис. 5

Отсюда и из предыдущего неравенства для площадей получаем (2).

2°. Если обозначить через  $S_{\text{сгн}}$  площадь сегмента  $ACB$  (см. рис. 4), то

$$S_{\text{сгн}} \leq \frac{2}{3} S_{\Delta BC} \quad (3)$$

Для доказательства этого неравенства воспользуемся следующим соображением. Обозначим (рис. 5) через  $S_0$  и  $A_0$  площади треугольников  $ABC$  и  $KLM$  соответственно. Рассмотрим теперь дугу  $AC$ , разделим ее точкой  $C_1$  пополам и построим два треугольника, имеющих площади  $S_1$  и  $A_1$  соответственно и лежащих внутри и вне сегмента  $AC_1C$  (см. рис. 5).

Рассмотрев теперь дугу  $AC_1$ , точкой  $C_2$  разделим ее пополам и построим точно таким же образом треугольники с площадями  $S_2$  и  $A_2$ . Точка  $C_2$  — середина дуги  $AC_1$  — порождает аналогичным образом треугольники с площадями  $S_3$  и  $A_3$ . Продолжая этот процесс, мы получим две последовательности  $\{S_n\}$  и  $\{A_n\}$  положительных чисел — площадей соответствующих треугольников. По доказанному в  $\Gamma^*$  — см. (2), — имеем следующую цепочку неравенств:

$$S_0 < 2A_0, S_1 < 2A_1, S_2 < 2A_2,$$

$$S_3 < 2A_3, \dots, S_n < 2A_n.$$

Ясно, что (рис. 6)

$$S_0 + 2S_1 + 2^2 S_2 + \dots + 2^n S_n + \dots = S_{\text{сгн}}$$

и

$$A_0 + 2A_1 + 2^2 A_2 + 2^3 A_3 + \dots + 2^n A_n + \dots = S_{\Delta BC} - S_{\text{сгн}}$$

Из приведенной цепочки неравенств и двух последних соотношений следует, что<sup>1</sup>

$$S_{\text{сгн}} \leq 2(S_{\Delta BC} - S_{\text{сгн}}),$$

т.е. утверждение (3).

<sup>1</sup> Нетрудно доказать, что если последовательности  $\{a_n\}$  и  $\{b_n\}$  имеют пределы и  $a_n < b_n, n = 1, 2, \dots$ , то  $\lim a_n \leq \lim b_n$ .

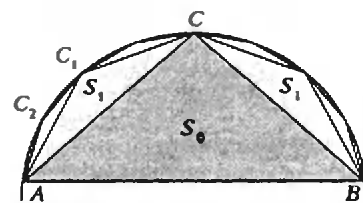


Рис. 6

3°. Следующая геометрическая лемма Гюйгенса представляет и самостоятельный интерес.

Лемма. На рисунке 7:  $O$  — центр круга, прямые  $AE$  и  $CD$  — касательные к окружности,  $AB$  — произвольная секущая, пересекающая прямую  $CD$ ,  $l_{AC}$  — длина дуги  $AC$ . Тогда справедливо следующее неравенство:

$$l_{AC} \leq \frac{2}{3} CD + \frac{1}{3} AF. \quad (4)$$

По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности,  $AE = EC$ ; следовательно, треугольник  $ACE$  равнобедренный и углы  $EAC$  и  $ECA$  равны. Отсюда следует, что треугольник  $AED$  также равнобедренный (так как  $\hat{CAD} = 90^\circ, \hat{DAE} = 90^\circ - \hat{EAC}, \hat{ADE} = 90^\circ - \hat{ECA}$ ) и тем самым  $AE = ED = CE$ . Из (3) следует, что  $S_{\text{сгн}} \leq (2/3) S_{\Delta EC}$ , где  $S_{\text{сгн}}$  — площадь сегмента круга, закрашенного на рисунке 7. Прибавив к обеим частям этого неравенства площадь  $S_{\Delta OAC}$  треугольника  $OAC$ , мы получим

$$S_{\text{сгн}} \leq \frac{2}{3} S_{\Delta EC} + S_{\Delta OAC},$$

где  $S_{\text{сгн}}$  — площадь сектора  $OAC$ , откуда

$$S_{\text{сгн}} \leq \frac{2}{3} S_{\Delta MEC} + \frac{1}{3} S_{\Delta OMC},$$

где  $S_{\Delta MEC}$  — площадь четырехугольника  $OMEC$ . Так как

$$S_{\Delta MEC} = 2 \cdot S_{\Delta OMC} = 2 \cdot \frac{1}{2} OC \cdot \frac{1}{2} CD = \frac{1}{2} OC \cdot CD,$$

$$S_{\Delta OMC} = \frac{1}{2} OC \cdot AF,$$

$$S_{\text{сгн}} = \frac{1}{2} OC \cdot l_{AC},$$

из последнего неравенства следует нужное соотношение (4).

4°. Для завершения доказательства неравенства (1) сделаем следующее построение (рис. 8): пусть  $AA_1$  — сторона правильного вписанного  $n$ -угольника, а  $LL_1$  — сторона правильного

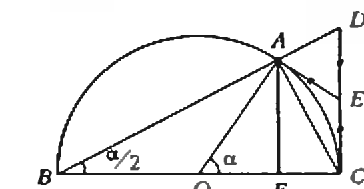


Рис. 7

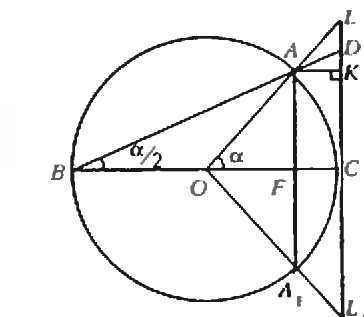


Рис. 8

описанного многоугольника с таким же числом сторон; проведем прямую  $AB$  и из точки  $A$  опустим перпендикуляр  $AK$  на касательную  $LL_1$ .

Так как  $\hat{AOC} = 2\hat{ABC}$  (один из углов центральный, а второй опирается на эту же дугу), мы видим, что  $AD$  — биссектриса в треугольнике  $LAK$ , и по теореме о биссектрисе имеем  $AL/LD = AD/KD$ .

Но  $(AK) \perp (KL)$ , поэтому  $AK < AL$  и из предыдущей пропорции получаем  $KD < LD$ . Так как  $AF = KC$ , получаем  $KD = CD - AF$ . Кроме того,  $LD = CL - CD$  и, следовательно,

$$CD - AF < CL - CD,$$

$$2CD < AF + CL.$$

$$2CD + AF < 2AF + CL.$$

Используя теперь (4), получаем

$$l_{AC} < \frac{2}{3} AF + \frac{1}{3} CL.$$

Аналогично можно написать, что

$$l_{AC} < \frac{2}{3} A_1 F + \frac{1}{3} CL_1$$

или, наконец,

$$l_{AC} + l_{AC} < \frac{2}{3} AA_1 + \frac{1}{3} l.l_1.$$

Умножив полученное неравенство на  $n$ , мы и получим неравенство (1).

### Дальнейшее исследование основного неравенства

Нами установлено, что число  $\pi$  лежит в первой трети интервала  $(p_n, q_n)$  при всех  $n \geq 3$ . Для того чтобы уточнить расположение числа  $\pi$  в этом новом интервале, рассмотрим отношение длин интервалов  $(p_n, \pi)$  и  $(\pi, q_n)$ . Вычисления показывают<sup>2</sup> (см. таблицы 1, 2), что это отношение длин, т.е. значения дробей

$$(q_n - \pi) / (\pi - p_n), \quad n = 3, 6, 12, 24.$$

достаточно близки к 2. На основании этих вычислений мы с большой степенью уверенности можем предположить, что в действительности имеет место соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2. \quad (5)$$

Для доказательства соотношения (5) заметим, что (рис.9)

$$p_n = n \cdot \sin \frac{\pi}{n}, \quad q_n = n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \quad n \geq 3,$$

и, следовательно,

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{n \sin \frac{\pi}{n} - \pi \cos \frac{\pi}{n}}{\pi - n \sin \frac{\pi}{n}}.$$

Для анализа полученного выражения нам понадобятся неравенства

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \quad x > 0, \quad (6)$$

значительно улучшающие известное не-

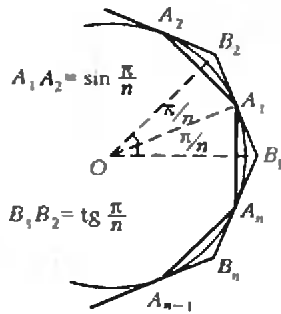


Рис. 9

равенство  $\sin x < x$  при  $x > 0$ . Чтобы доказать левое неравенство в (6), положим

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}.$$

Тогда имеем

$$g_1(x) = f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},$$

$$g_2(x) = g_1'(x) = -\sin x + x.$$

Так как  $\sin x < x$  при  $x > 0$ , получим  $g_2(x) > 0$  при  $x > 0$ . Тем самым функция  $g_1(x)$  возрастает при  $x > 0$ . Но  $g_1(0) = 0$  и, следовательно,  $g_1(x) > 0$  при  $x > 0$ . Функция  $g_1(x)$  является производной для функции  $f(x)$ , для которой также  $f(0) = 0$ . Но при  $x > 0$  имеем  $g_1(x) > 0$ , поэтому функция  $f(x)$  также возрастает и, следовательно, принимает только положительные значения, т.е.  $f(x) > 0$  при  $x > 0$ , что и утверждалось.

Аналогично устанавливается правая часть неравенства (6), а также неравенства

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad x > 0. \quad (7)$$

(Докажите их самостоятельно!)

Из неравенств (6) и (7) вытекают следующие приближенные формулы:

$$\sin \frac{\pi}{n} \approx \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3}, \quad \cos \frac{\pi}{n} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2n^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{q_n - \pi}{\pi - p_n} = 2 \left( 1 - \frac{\pi^2}{2n^2} \right)^{-1}.$$

Что и завершает доказательство соотношения (5), так как  $\frac{\pi^2}{2n^2}$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Равенство (5) позволяет сделать следующий качественный вывод: число  $\pi$ , находясь при любом  $n \geq 3$  в интервале  $(p_n, \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n)$ , при всех достаточно больших значениях  $n$  ближе к правому концу этого интервала, чем к левому.

### Формула Гюйгенса и ее эффективность

Архимед использовал для вычисления числа  $\pi$  приближенную формулу  $\pi = p_n, n \geq 3$ .

Гюйгенс в своей работе, в частности, получил другую приближенную формулу  $\pi = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, n \geq 3$ , т.е. взял в качестве приближения для числа  $\pi$  правую часть неравенства (1).

Большую эффективность формулы Гюйгенса по сравнению с формулой Архимеда можно обнаружить непосредственными вычислениями на микрокалькуляторе (см. табл. 1, 3). Отметим, что провести такие вычисления — увлекательная и непростая задача.

Можно сравнить эффективность формул Архимеда и Гюйгенса другим методом, не производя конкретных вычислений для  $p_n$  и  $q_n$ . Можно использовать так называемые априорные оценки для точности этих формул, т.е. такие неравенства, которые позво-

Таблица 1

$n$	$p_n$	$q_n$
3	2,59807621	5,19615242
6	3,00000000	3,46410161
12	3,10582854	3,21539030
24	3,13262861	3,15965994
48	3,13935020	3,14608621
96	3,14103195	3,14271459
192	3,14145247	3,14187304
384	3,14155760	3,14166274
768	3,14158389	3,14161017
1536	3,14159046	3,14159703
3072	3,14159210	3,14159374

Таблица 2

$n$	$(q_n - \pi) / (\pi - p_n)$
3	3,78012440
6	2,27772383
12	2,06345553
24	2,01552959
48	2,00386204
96	2,00096424
192	2,00024098
384	2,0006024
768	2,0000150
1536	2,00000376
3072	2,00000094

Таблица 3

$n$	$\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n$
3	3,464101615137
6	3,154700538379
12	3,142349130544
24	3,141639056219
48	3,141595540408
96	3,14159283380
192	3,141592664850
384	3,141592654293
768	3,141592653633
1536	3,141592653592
3072	3,141592653589

ляют оценить разности  $\pi - p_n$  и  $\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n - \pi$  для всех  $n \geq 3$  заранее, без вычисления периметров. Ценность таких априорных оценок состоит также и в том, что они позволяют, в частности, спланировать вычисления. Задаваясь какой-то точностью вычислений для нужной величины (в нашем случае для числа  $\pi$ ), мы можем из этих оценок найти те значения числа  $n$ , для которых нужная точность будет достигнута. Используя неравенства (6) и (7) и производя простейшие арифметические вычисления, нетрудно получить (мы оставляем это читателю в качестве упражнения!) следующие априорные оценки:

$$\frac{5}{n^2} < \pi - p_n < \frac{6}{n^2}, \quad n \geq 3, \quad (8)$$

и

$$\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n - \pi < \frac{64}{n^4}, \quad n \geq 3. \quad (9)$$

Непосредственно из этих неравенств замечаем, что «скорость», с которой разность  $\frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n - \pi$  стремится к нулю, больше «скорости», с которой стремится к нулю разность  $\pi - p_n$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

Для сравнения этих «скоростей» найдем те значения  $n$ , которые нам наверняка обеспечат точность вычисления числа  $\pi$ , например, равную  $10^{-2}$ . Так как  $\pi - p_n < 6/n^2$ , для вычисления по формуле Архимеда с этой точностью достаточно взять  $n$  таким, чтобы  $6/n^2 < 10^{-2}$ , т.е.  $n \geq 25$ . Используя же формулу Гюйгенса, нам достаточно выбрать  $n$  таким, чтобы  $64/n^4 < 10^{-2}$ , т.е.  $n \geq 9$ .

Как видно из разобранного примера, а также из неравенств (8) и (9), формула Гюйгенса быстрее приводит к заданной точности.

**Две задачи**

Мы помещаем здесь материал, который может стать началом небольшого математического исследования.

**Задача 1.** Пусть  $AC$  — хорда,  $BB_1 = 2R$  — диаметр окружности,  $O$  — центр круга,  $BB_1 \perp AC$ ,  $B$  — середина дуги  $AC$ ,  $E$  и  $F$  — середины дуг  $AB$  и  $BC$  соответственно (рис. 10). Докажите, что

- а)  $AB^2 = HD \cdot BB_1$ ,  $HE^2 = BG \cdot BB_1$ ;
- б)  $BD < 4 \cdot BG$ ; в)  $AC < 2 \cdot EF$ ;
- г)  $S_{ABC} < 4(S_{ADE} + S_{BGC})$ ; д) площадь сегмента  $ABC$  больше  $\frac{4}{3}S_{ABC}$ ;

- е)  $\pi R^2 > \frac{4}{3}S_n - \frac{1}{3}S_n$ , где  $S_n$  — площадь правильного вписанного в окружность  $n$ -угольника ( $S_{2n}$  — соответственно  $2n$ -угольника); ж)  $2\pi R > \frac{4}{3}p_n - \frac{1}{3}p_n$ , где  $p_n$

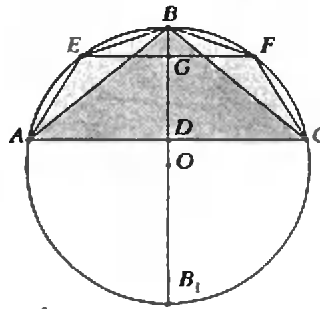


Рис. 10

— периметр правильного вписанного в окружность  $n$ -угольника ( $p_{2n}$  — соответственно  $2n$ -угольника); з) если  $R=1/2$ , то  $\pi - \frac{1}{3}(4p_n - p_n) < \frac{C}{n^4}$ , где  $C$  — некоторая постоянная, причем  $3/5 < C < 3$ .

**Задача 2.** Докажите, что все нижеперечисленные пределы существуют, и найдите их:

- а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\pi - p_n)$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}q_n - \pi)$ ;
- в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n^2 - p_{n-1}p_{n+1}}{2p_n - p_{n-1} - p_{n+1}}$ ;
- г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4(\pi - \frac{4}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n)$ ; д)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi R^2 - S_{n(n)}}{S_n(n) - \pi R^2}$ ,

где  $R$  — радиус круга;  $S_n(n)$ ,  $S_n(n)$  — площади правильных вписанных и описанных  $n$ -угольников.

В заключение отметим, что наблюдение Гюйгенса о том, что число  $\pi$ , равное длине окружности радиуса  $1/2$ , находится в два раза ближе к периметру описанного вокруг этой окружности правильного  $n$ -угольника, чем к периметру описанного вокруг этой окружности правильного  $n$ -угольника, было не так давно обобщено на случай произвольных выпуклых фигур, ограниченных гладкими (без изломов) кривыми. Именно, имеет место следующее утверждение.

Пусть  $L$  обозначает длину выпуклой замкнутой кривой без изломов,  $P_n$  — периметр  $n$ -угольника с максимальным периметром, вписанного в данную кривую и  $Q_n$  — периметр описанного вокруг данной кривой  $n$ -угольника с минимальным периметром (такие существуют!). Тогда справедливо соотношение  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q_n - L}{L - P_n} = 2$ .

Доказательство этого утверждения и многие другие интересные результаты, связанные с ним, можно найти в книге [4].

Доказанный выше результат Гюйгенса — своего рода дань его преклонению перед работами Архимеда, с которыми он познакомился в шестнадцатилетнем возрасте во время обучения в Лейденском университете по совету известного математика и инженера Схоутена. Первые свои научные работы Гюйгенс написал под явным влиянием Архимеда, в двадцатилетнем возрасте он написал трактат о теории плавания тел, а затем в течение всей своей жизни возвращался к исследованиям великого грека. Не случайно Гюйгенс-отец назвал сына «своим Архимедом».

В упоминавшейся уже работе «О величине круга» содержится задача, явно навеянная методами Архимеда и дающая возможность построения (и вычисления) очень хорошего приближения для длины окружности.

**Задача 3.** Пусть дана окружность с диаметром  $AB$  (рис. 11),  $C$  — середина одной из полуокружностей, точки  $D$  и  $E$  делят вторую полуокружность на три равные части. Тогда

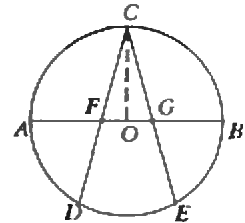


Рис. 11

из полуокружностей, точки  $D$  и  $E$  делят вторую полуокружность на три равные части. Тогда

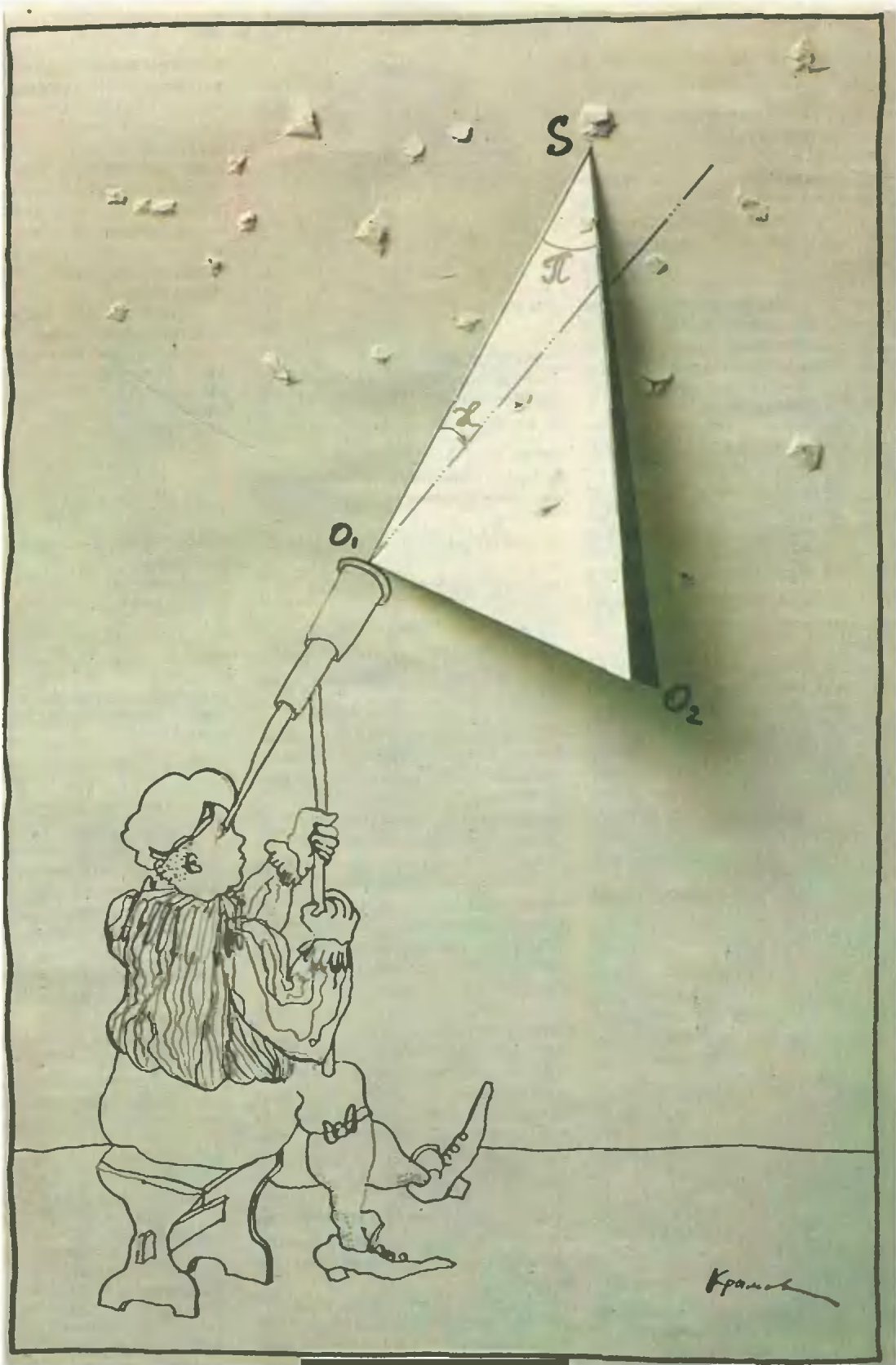
$$|CF + FG - \frac{1}{4}AC| < \frac{1}{4000} AB.$$

Имя Гюйгенса было хорошо известно Петру I, который повелел перевести на русский язык его последнее полунаучное, полуфилософское произведение «Космотеорос», посвященное, в частности, обоснованию возможности существования жизни на других планетах. Естественно, это издание вызвало негодование церкви, и после смерти Петра большая часть тиража была расхищена.

Научные идеи Гюйгенса проникли в Россию благодаря замечательным ученым Давиду и Николаю Бернулли и Леонарду Эйлеру — академикам Петербургской академии наук.

**Литература**

1. Рудно Ф. *О квадратуре круга* (Архимед, Гюйгенс, Лежандр, Ламберт). — Матезис, 1911.
2. Веселовский И. Н. *Христиан Гюйгенс*. — М.: Учпедгиз, 1959.
3. Кипман Ф. *История числа  $\pi$* . — М.: Наука, 1971.
4. Тот Л. Ф. *Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве*. — М.: Физматгиз, 1958.



# Звездная абберрация и теория относительности

Б. ГИММЕЛЬФАРБ

**И**стория открытия и объяснения звездной абберрации драматична и поучительна. Это драма в четырех действиях, разыгрывавшаяся на протяжении двух с половиной столетий. Теперь она завершена, и настало время написать ее эпилог. Это мы и выполним, предварительно рассказав кратко ее содержание.

*Это драма, драма идей.*  
 А. Эйнштейн  
 (по воспоминаниям Л. Инфельда)

Действие первое заключается в том, что абберрация была открыта в результате целеустремленных поисков совсем другого явления — звездных параллаксов.

Параллакс — это изменение направления на объект вследствие изменения положения наблюдателя. В астрономии оно проявляется как смещение видимого положения светила. Существование звездных параллаксов является очевидным следствием движения Земли. Это понимал уже Аристотель: именно отсутствие заметных параллактических движений звезд он считал убедительным подтверждением неподвижности Земли.

Поиски звездных параллаксов усилились после выхода в свет в 1543 году книги Николая Коперника «О Вращении небесных сфер», утверждавшей гелиоцентрическую систему мира. Цель этих поисков была двойной.

Во-первых, обнаружение юджичных параллаксов звезд было бы прямым доказательством движения Земли вокруг Солнца на основании наблюдений небесных объектов, находящихся за пределами Солнечной системы, тогда как Коперник располагал доказательствами, основанными лишь на наблюдениях планет, которые входят в состав Солнечной системы.

Во-вторых, чем дальше звезда, тем меньше ее параллакс (что наглядно показано на рисунке 1), поэтому измерение звездных параллаксов позволяет определять расстояния до звезд. А во времена Коперника не только не были известны величины этих расстояний, но было вообще неизвестно, помещаются ли звезды на разных рассто-

яниях или все они расположены на одном и том же расстоянии — на «сфере неподвижных звезд». В противоположность Аристотелю, Коперник считал отсутствие заметных параллаксов звезд не подтверждением неподвижности Земли, а свидетельством того, что звезды находятся на чрезвычайно больших расстояниях от Земли. Этот его вывод впоследствии полностью подтвердился.

До изобретения телескопа так и не удалось не только измерить, но даже и обнаружить существование звездных параллаксов. Безуспешными остались попытки обнаружить параллактические смещения звезд, предпринимавшиеся величайшим астрономом-наблюдателем дотелескопического периода Тихо Браге (XVI в.), хотя он достиг предельной точности, доступной при наблюдениях невооруженным глазом (около 1'). Эта неудача оказалась одной из главных причин, из-за которых Тихо Браге так и не поверил в движение Земли и не принял гелиоцентрической системы Коперника. Он предложил свою, компромиссную систему мира, в которой Солнце, вместе с об-

ращающимися вокруг него планетами, само обращается вокруг неподвижной Земли.

После изобретения телескопа и, в особенности, окулярного микрометра (в середине XVII века), что многократно увеличило точность астрономических наблюдений, попытки обнаружить звездные параллаксы предпринимались неоднократно. Были даже сообщения об успехе таких попыток, но достоверность их вызвала сомнения. За проверку их взялся Дж. Брайлей в декабре 1725 года. Он проводил наблюдения в телескоп, установленный неподвижно и направленный в зенит. Такое, вертикальное, положение телескопа исключало два источника ошибок наблюдений: изменяющуюся атмосферную рефракцию (т.е. преломление света в земной атмосфере) и гнутые трубы под действием собственного веса. Наблюдалось прохождение через меридиан звезды Гамма в созвездии Дракона, которая помещается вблизи полюса эклиптики (в 15° от него) и в месте наблюдений — в пригороде Лондона Кью — проходит через меридиан около зенита.

Уже через две недели после начала наблюдений Брайлей обнаружил заметное смещение звезды, явно не вызванное ошибками наблюдений. Однако дальнейшие наблюдения показали, что это смещение направлено противоположно ожидаемому. (Абберрационное смещение становится заметным только при существенном изменении скорости Земли (по направлению). Если бы Земля двигалась равномерно по прямой, абберрация была бы не наблюдаема. Только через 3 месяца Брайлей смог сделать уверенный вывод о направлении наблюдаемого смещения, — *Прим. ред.*) Параллактическое смещение должно быть направлено в сторону, противоположную направлению перемещения наблюдателя, а обнаруженное Брайлем смещение звезды было направлено в сторону движения Земли (рис. 2). Впоследствии, когда были изучены закономерности этого явления, оно

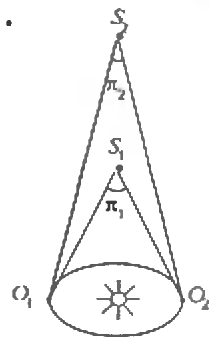


Рис. 1. Направление на звезды  $S_1$  и  $S_2$  из двух противоположных точек земной орбиты  $O_1$  и  $O_2$ . За мпу звездных параллаксов принята половина обозначенных здесь углов  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

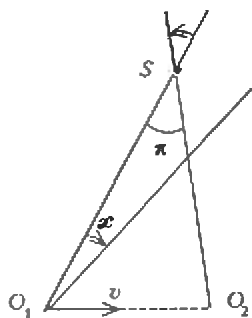


Рис. 2. Параллакс и абберация:  $O_1$  и  $O_2$  — положения наблюдателя в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ ,  $v$  — скорость его движения,  $S$  — звезда,  $\pi$  — ее параллактическое смещение,  $\alpha$  — абберационное смещение

получило название годичной абберации, что означает, в переводе с латинского, уклонение.

Действие второе заключается в том, что абберация тотчас же, как только были установлены основные ее закономерности, получила правильное объяснение на основе... неверной теории света.

Проведя годичный цикл наблюдений звезды Гамма Дракона и некоторых других звезд, расположенных на разных расстояниях от эклиптики, и установив основные закономерности новооткрытого явления, Брайдей нашел правильное его объяснение, исходя из корпускулярной теории света. Эта теория, осыпанная авторитетом Исаака Ньютона, признанного великим ученым еще при жизни, была господствующей в науке в течение всего XVIII века, и лишь в начале XIX века на смену ей пришла волновая теория света.

Объяснение абберации, данное Брайдлеем, в переводе на язык современной науки сводится к тому, что направление луча света, воспринимаемого движущимся наблюдателем, отличается от направления светового луча в неподвижной системе отсчета вследствие сложения скорости света со скоростью движения наблюдателя. Это объяснение определяет фундаментальный характер открытия годичной абберации звезд, которое оказалось исторически первым прямым доказательством орбитального движения Земли на основании наблюдения небесных объектов, находящихся вне пределов Солнечной системы. Таким образом, абберация приняла на себя ту историческую роль, которая предназначалась звездным параллаксам, в процессе поисков которых она была

открыта. (Звездные параллаксы были открыты значительно позже — первым их наблюдал русский астроном В.Я. Струве в 1836 году на Пулковской обсерватории вблизи Санкт-Петербурга. — *Прим. ред.*)

Правда, открытие абберации не решило второй задачи, ради которой предпринимались поиски звездных параллаксов, а именно определения расстояний до звезд. Зато это открытие представило первое независимое подтверждение того факта, что свет распространяется с конечной скоростью, — факта, установленного полустолетием ранее О. Рёмером и не получившего еще к тому времени общего признания. Оно также показало, какое влияние оказывает этот факт на результаты позиционных астрономических наблюдений. Заметим, что звездные параллаксы наблюдались бы также и в том случае, если бы свет распространялся мгновенно.

Из определения звездной абберации как результата сложения скорости света со скоростью движения наблюдателя можно легко вывести величину абберационного смещения. Мы сделаем это для простейшего (и важнейшего) случая — когда направление луча света в неподвижной системе отсчета составляет прямой угол с направлением движения наблюдателя. Этот случай соответствует условиям наблюдений Брайдея. Сложение скоростей по правилу параллелограмма, соответствующее этому случаю, изображено на рисунке 3. Здесь  $\vec{c}$  — вектор скорости света, определяющий направление светового луча в неподвижной системе отсчета,  $\vec{c}'$  — вектор скорости света, определяющий направление светового луча, регистрируемое движущимся наблюдателем,  $\vec{v}$  — вектор скорости движения наблюдателя,  $\alpha$  — угол между направлениями луча света в неподвижной и в движущейся системах отсчета, которым намеряется абберационное смещение звезды. Из рисунка получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c}.$$

Действие третье заключается в том, что абберация оказалась первым явлением из области оптики движущихся тел, с которым встретила наука. Объяснение этих явлений в рамках волновой теории света встретилось с непреодолимыми трудностями, нашедшими свое окончательное разрешение только в теории относительности.



Рис. 3. Расчет величины абберационного смещения:  $c$  — скорость света в неподвижной системе отсчета,  $c'$  — в системе отсчета наблюдателя,  $v$  — скорость движения наблюдателя,  $\alpha$  — абберационное смещение

Напомним, что классическая волновая теория рассматривала свет как волновое возмущение некой светонесущей среды — эфира. Тем самым в оптике появлялась естественная неподвижная система отсчета, связанная с эфиром, заполняющим мировое пространство.

В рамках этих представлений оптика движущихся тел выдвинула два основных вопроса:

1. Как влияет движение источника на скорость распространения испускаемого им света?
2. Увлекается ли светонесущая среда (эфир) движущимися телами или остается неподвижной?

Волновая теория света дала однозначный ответ на первый вопрос: скорость света (относительно эфира) не зависит от скорости движения источника. Вообще, скорость распространения любой волнового процесса определяется только свойствами передающей среды и не зависит от движения источника волн. Это в равной мере относится к волнам любой природы — и к электромагнитным (свет, радио, и т.п.), и к механическим (звуковым, сейсмическим, а также волнам на поверхности раздела двух сред, примерно коих могут служить морские волны). Скорость света в вещественной среде меньше, чем в пустоте, и различна в разных средах.

Наблюдения годичной абберации подтвердили независимость скорости света от движения звезд, поскольку величина наибольшего в течение года абберационного смещения  $\alpha$  оказалась одной и той же у всех звезд. Эта величина также соответствует случаю, для которого выше была приведена формула абберационного смещения. Поэтому его численное значение мож-

но найти, подставив в формулу среднюю орбитальную скорость Земли  $v = 29,76$  км/с и скорость света  $c = 299\,792$  км/с. Чтобы выразить результат в секундах дуги, нужно помножить ответ на число секунд в радиане, т.е. на 206265, что дает значение  $\alpha = 20,5''$ . Эта величина носит название абберационной постоянной и принадлежит к фундаментальным постоянным астрономии.

Если бы скорость света зависела от скорости движения источника, то абберационные смещения были бы различны у разных звезд в зависимости от их пространственных скоростей, и не существовало бы единой для всех звезд абберационной постоянной. Наблюдения же показали, что абберационное смещение зависит только от скорости орбитального движения Земли и что оно изменяется только вследствие изменения этой скорости по величине и по направлению.

Труднее оказалось ответить на второй основной вопрос оптики движущихся тел. Важным «пробным камнем» для различных теорий увлечения эфира было как раз объяснение явления абберации. Первое объяснение абберации на основе волновой теории света дал Т.Юнг в 1804 году. Оно сводилось к тому, что при движении наблюдателя световые волны отстают под действием «эфирного ветра», дующего со скоростью, равной по величине и обратной по направлению скорости движения наблюдателя (рис. 4). Из этого объяснения следовало, что абберация служит экспериментальным подтверждением того, что светоносная среда не увлекается движущимися телами.

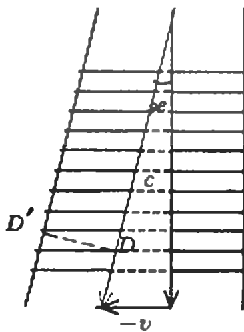


Рис. 4. Объяснение абберации в волновой теории света:  $c$  — скорость света,  $v$  — скорость отставания световых волн,  $\alpha$  — абберационное смещение,  $DD'$  — плоскость, перпендикулярная направлению светового луча

Однако вскоре, в 1818 году, О.Френель выдвинул гипотезу частичного увлечения эфира движущимися телами и вывел формулу, определяющую коэффициент увлечения. Формула Френеля была подтверждена в 1851 году непосредственными измерениями в опыте И.Физо по определению скорости света в движущейся жидкости. Френель сделал из своей гипотезы вывод, что угол абберации не изменится, если трубу телескопа заполнить преломляющей средой. Наблюдения в телескоп, наполненный водой, были проведены Д.Эйри в 1871 году. Они подтвердили независимость абберации от показателя преломления промежуточной среды, а следовательно, и гипотезу частичного увлечения эфира движущимися телами.

Третью альтернативную гипотезу — полного увлечения эфира движущимися телами — разрабатывал Д.Стокс, но его доводы не выдержали критики, которой их подверг Х.Лоренц. Вместе с тем, интерференционный опыт А.Майкельсона, осуществленный впервые в 1881-году и впоследствии неоднократно повторявшийся, свидетельствовал о полном отсутствии «эфирного ветра». (Подробнее о коэффициенте увлечения, опытах Физо и Майкельсона можно прочитать в книге С.Филоновича «Самая большая скорость» (серия «Библиотечка «Квант», выпуск 27). — Прич. ред.) Такой вывод казался несовместимым с существованием абберации. Таково было положение, сложившееся к началу нынешнего, XX столетия.

Действие четвертое, связанное с возникновением теории относительности, которая разрешила весь клубок противоречий, накопившихся в оптике движущихся тел.

Годичная абберация считается одним из важнейших прямых доказательств орбитального движения Земли, и для теории относительности было важно установить, каков характер этого движения: если это движение относительное, то тем самым теория получила бы подтверждение; если же это движение абсолютное, то она была бы опровергнута. Придавая, по его собственному выражению, особую важность этому вопросу, А.Эйнштейн уже в первой своей основополагающей работе 1905 года («К электродинамике движущихся тел») вывел релятивистские формулы абберации, показав, тем самым, что это явление не противоречит теории относительности.

Независимость звездной абберации от движения светила является следствием независимости скорости света от движения его источника. В теории относительности этот факт не просто признается, но и положен в ее основу в качестве принципа постоянства скорости света. Суть этого принципа заключается в том, что каково бы ни было движение источника света по отношению к данной системе отсчета, скорость света в ней остается неизменной, такой же, как в неподвижной системе отсчета.

Чтобы вывести величину абберационного смещения в теории относительности, нужно принять во внимание три обстоятельства. Во-первых, что скорость света в обеих системах отсчета — в движущейся и в той, в которой определяется ее движение, — имеет одинаковую величину и от сложения со скоростью движения наблюдателя изменяется только по направлению. Во-вторых, что масштабы времени в этих системах отсчета различны. В-третьих, что поперечные размеры при переходе из одной системы отсчета в другую не претерпевают изменения.

Рассмотрим луч света, распространяющийся точно вдоль оси  $Y$  неподвижной системы отсчета  $K$  и прошедший через время  $t$  в начало координат. На рисунке 5 изображено движение этого луча в системе отсчета  $K'$ , движущейся вправо со скоростью  $v$ . Если в момент испускания луча оси  $Y$  и  $Y'$  совпадают и время до прихода луча на ось  $OX$  равно  $t'$ , то координата точки прихода равна  $(-vt')$ , а расстояние, пройденное этим лучом, равно  $ct'$ . Из получившегося прямоугольного треу-

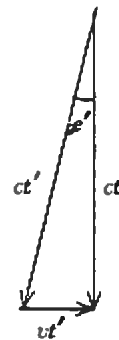


Рис. 5. Расчет величины абберационного смещения в теории относительности:  $c$  — скорость света,  $v$  — скорость движения наблюдателя,  $t$  — промежуток времени в неподвижной системе отсчета,  $t'$  — в движущейся системе отсчета,  $\alpha'$  — абберационное смещение

гольника находим релятивистскую формулу для абберационного смещения  $\alpha'$ :

$$\sin \alpha' = \frac{v t'}{c t'} = \frac{v}{c}.$$

Для сравнения величины релятивистского абберационного смещения  $\alpha'$  с полученной ранее из классической теории величиной  $\alpha$ , которая определяется формулой  $\operatorname{tg} \alpha = v/c$ , нужно вспомнить известное из тригонометрии соотношение между синусом и тангенсом одного и того же угла:  $\operatorname{tg} \alpha = \sin \alpha / \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ . Тогда имеем

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Поскольку  $\operatorname{tg} \alpha' > \operatorname{tg} \alpha$ , можно сделать вывод, что релятивистское абберационное смещение  $\alpha'$  несколько больше классического абберационного смещения  $\alpha$ , но различие их проявляется в членах, содержащих отношение  $v^2/c^2$ , т.е. второго порядка малости. В пределе, если считать отношение  $v^2/c^2$  исчезающее малой величиной, релятивистская формула переходит в классическую, как и должно быть в согласии с принципом соответствия.

Видно, что в объяснение звездной абберации с точки зрения лучевой (геометрической) оптики теория относительности не внесла ничего принципиально нового, ограничившись сравнительно небольшой количественной поправкой в величине абберационного смещения из-за различия масштабов времени в относительно движущихся системах отсчета. Принципиальное различие между классическим и релятивистским объяснениями абберации проявляется в волновой теории этого явления. Состоит оно в том, что в классическом объяснении луч света, отклоненный абберацией, физически отличим от неотклоненного луча, так как у него волновые поверхности не составляют прямого угла с направлением распространения света.

Подобное явление встречается в кристаллооптике, при двойном лучепреломлении, где таким же свойством обладает «необыкновенный луч». В случае абберации оно возникает из-за того, что волновые поверхности занимают одинаковое положение во всех системах отсчета, тогда как направление светового луча зависит от скорости движения системы отсчета наблюдателя (см. рис. 4).

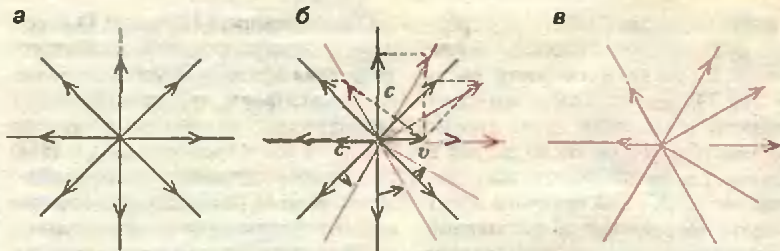


Рис. 6. Излучение быстродвижущегося источника: а) в системе источника, б) в системе наблюдателя; б) абберационное отклонение,  $c$  — скорость света,  $v$  — скорость движения источника

Отличие угла между направлением луча света и волновыми поверхностями от прямого, равное абберационному отклонению луча, могло бы быть обнаружено посредством интерференционного эксперимента, в котором определялась бы разность фаз в двух точках  $D$  и  $D'$  в плоскости, перпендикулярной световому лучу. Это и был бы тот самый физический эксперимент, осуществляемый внутри движущейся системы отсчета, который призван установить ее абсолютное движение. Теория этого эксперимента аналогична теории опыта Майкельсона. Поэтому, на основании отрицательного результата последнего, можно с уверенностью утверждать, что и такой интерференционный эксперимент даст отрицательный результат. Указанная разность фаз на самом деле равна нулю.

В релятивистском объяснении абберации волновые поверхности составляют прямой угол с направлением распространения света во всех относительно движущихся системах отсчета, и никакого физического различия между отклоненным абберацией и неотклоненным лучами света не существует. Происходит так по той причине, что волновые поверхности — это поверхности одновременно равных фаз, а в разных относительно движущихся системах отсчета одновременно равные фазы приходятся не на одни и те же точки пространства. Получается, что волновые поверхности наклоняются на такой же угол, на какой вследствие абберации поворачивается луч света.

Переход от системы отсчета, связанной с источником света, к системе отсчета наблюдателя проявляется, в частности, в релятивистском абберационном эффекте излучения быстродвижущихся источников. Особенность его состоит в том, что источник, который в непод-

вижном состоянии излучает равномерно во все стороны (изотропно), при быстром движении излучает преимущественно вперед по направлению своего движения. Причина такого перераспределения излучения по направлениям заключается в сложении скорости света со скоростью движения системы отсчета, связанной с источником. На рисунке 6 изображен случай движения источника со скоростью, составляющей половину скорости света. Чем больше скорость источника, тем более узко направленным вперед будет его излучение. Во внегалактической астрономии подобный эффект встречается при наблюдении удаленных галактик. Они удаляются с тем большей скоростью, чем дальше от нас помещаются, что обнаруживается по красному смещению их спектральных линий. Из-за такого разбегания галактик мы наблюдаем их с тыла, а поскольку они излучают преимущественно вперед по направлению своего движения, их излучение назад ослаблено. Поэтому воспринимаемая наблюдателем яркость удаленных галактик оказывается ослабленной по сравнению с их яркостью в системе отсчета, в которой они неподвижны.

Эпилог. Рассказанная в общих чертах история объяснения абберации не только драматична, но и парадоксальна. Последнее обстоятельство выражается в том, что на протяжении двух с половиной столетий объяснение абберации никогда не представляло нерешенной научной проблемы: на всех этапах, при всех сменах физических теорий абберация получала в них правильное (в рамках существующих теорий) объяснение. Теория относительности дала, наконец, законченное и физически осмысленное объяснение абберации.



# Размышления физика-альпиниста

Д.Ж. ВАЙЛИ

**Н**емного есть на свете вещей, которые я люблю больше, чем поиск общей физической основы у совсем несхожих внешне элементов природы. И неважно, оказываюсь ли я при этом первооткрывателем, — в большинстве случаев я обнаруживаю, что отстал лет на 200—300. Удовлетворение возникает оттого, что я делаю это сам и увязываю это с моим собственным опытом.

В течение некоторого времени я изучал элементы скалолазания и альпинизма. Пыле вся эта область стала ареной приложения настоящей науки — от атмосферной физики до динамики лавин, от динамики тела спортсменки<sup>1</sup> во время подъема до технологии производства современных альпинистских веревок.

Во время моего недавнего путешествия в горы в некоторый момент я обнаружил, что стою на очень крутом каменистом склоне и обоняваю ледник в 600 метров ниже. И тогда, будучи физиком, я получил повод поразмыслить о трении, которое обеспечивало мое благополучие.

## Трение

В последнее время резко возрос интерес к спортивному скалолазанию. Как уже случалось с другими видами спорта, ставшими популярными, этот рост сопровождался технологической революцией в необходимом (хотя для многих видов спорта лучше сказать «желательном») оборудовании. Можно утверждать вполне аргументировано, что наибольшим изменением в скалолазании было введение в практику высокофрикционных скалолазных ботинок. В отличие от тяжелых туристских ботинок с рантом, которые использовали многие годы, эти ботинки — очень легкие и имеют гладкую

резиновую подметку. Воздействие, которое эти ботинки оказали на спорт, можно проиллюстрировать традиционной задачей о бруске на наклонной плоскости.

Рассмотрим скалолазный ботинок нового поколения на поверхности скалы, наклоненной под углом  $\theta$  к горизонту. Стандартный подход позволяет вычислить максимальный угол, при котором ботинок не будет скользить по плоскости. Приравняв компоненты сил вдоль наклонной плоскости (рис. 1), мы находим

$$mg \sin \theta = \mu N = \mu mg \cos \theta,$$

где  $\mu$  — коэффициент трения между подошвой ботинка и поверхностью

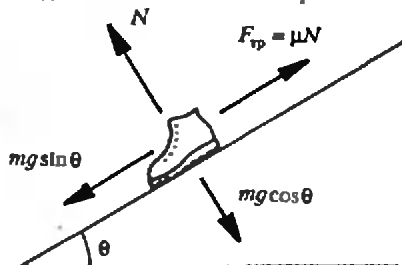


Рис. 1. Альпинистский ботинок на наклонной плоскости

наклонной плоскости, откуда следует  $\operatorname{tg} \theta = \mu$ .

Это не представляется таким уж потрясающим результатом, пока мы не обнаруживаем, что для этой новой резины на гладком граните

$$\mu = 1,2, \text{ или } \theta = 50^\circ.$$

Только новичок чувствует некоторый трепет, шагая вверх (или вниз) по склону с углом, близким к  $50^\circ$ , для опытной скалолазки это обычное дело.

Мы можем теперь понять физику, скрывающуюся за манерой поведения любой хорошей скалолазки — она держит корпус отклоненным от скалы. Естественное желание, с другой стороны, состоит в том, чтобы наклониться поближе к поверхности скалы и вжаться в стену (рис. 2). Отталкиваясь от скалы, наша опытная скалолазка переносит большую часть своего веса,

если не весь вес, на ноги — на свои дорогие резиновые скалолазные ботинки. Увеличение силы нормального давления на ноги приводит к возрастанию максимальной силы трения покоя. В то же время плохая скалолазка переносит слишком большую часть веса на руки, где трение вовсе не такое большое... и может стать еще меньше, если она начнет нервничать.

К счастью, не все восхождения совершаются в таких легких условиях. Наиболее волнующие восхождения происходят на более крутых склонах. Правило «прижми ноги к камню» все еще остается в силе. Хороший пример тому — восхождение по так называемой трубе (расщелине) или углу. В этих ситуациях скалолазка

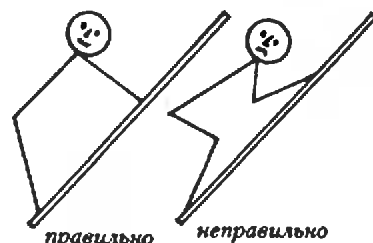


Рис. 2. Два возможных положения тела альпинистки на крутом склоне

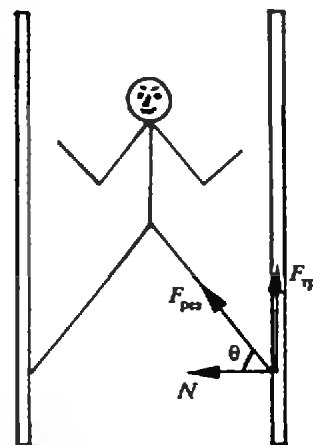


Рис. 3. Альпинистка, использующая положение «в распорку» в широкой трубе. Сила  $F_{\text{fr}}$ , действующая со стороны скальной стенки на ногу альпинистки, направлена вдоль ноги

<sup>1</sup> Члены не являются на себя упреки и мужским тыжилиме со стираты поборники женского равноправия, автор дилег выводу интриги о стили действующем лице «она». Соответствующие в термиде неизбежно пинадлань «альпинистка» и «скалолазка». Ассоциации с прелестью пещер Высоцкого не возбудятся, но в приложении эти мажоритарно. (Прим. перев.)

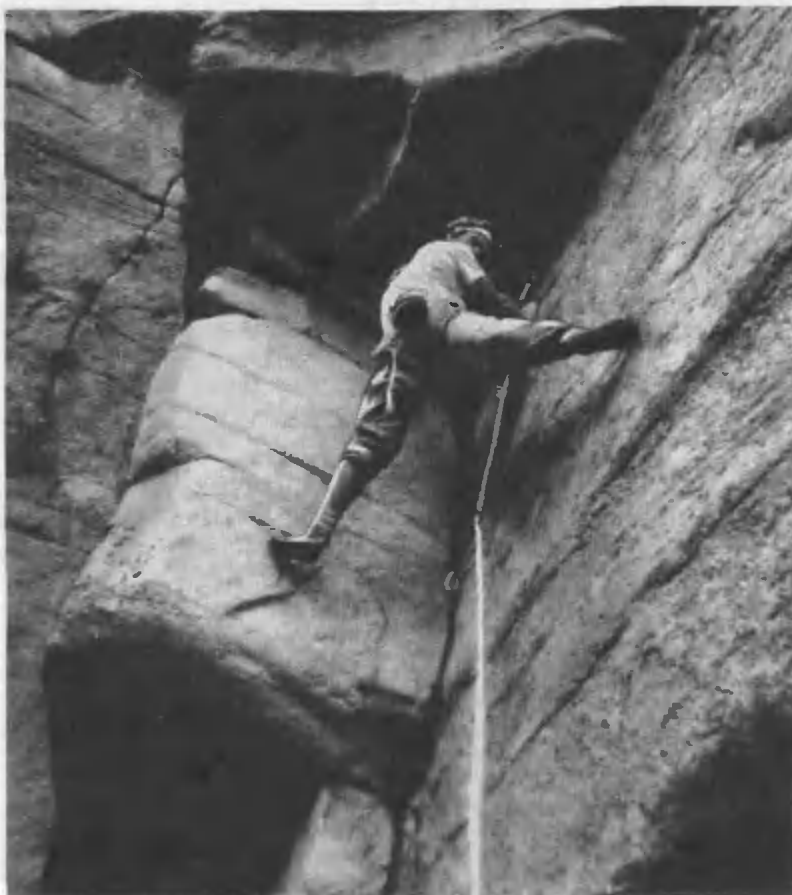


Рис. 4. Автор использует положение «в распорку» для восхождения по крутому углу. Руки и предплечья только поддерживают равновесие

находится между двумя противоположными скальными стенками и должна создать ногами распорку между ними. Скалолазка на рисунке 3 поднимается между двумя параллельными стенками. Труба достаточно широка, чтобы позволить положение, показанное на рисунке. В более узких трубах скалолазка может оказаться вынужденной использовать стиль, при котором ее спина и одна согнутая нога упираются в одну стенку, а другая нога — в другую. Скалолаз на рисунке 4 использует положение «в распорку», поднимаясь по крутому углу. Чтобы понять физику, скрытую за каждой ситуацией, давайте взглянем на силы, действующие на ногу скалолаза, находящегося в трубе.

Для того чтобы скалолазка с рисунка 3 оставалась в уютном равновесии, равнодействующая сил, приложенных к ее ноге со стороны каменной стенки, должна быть направлена вдоль кости ее распрямленной ноги. Как в пред-

ыдущей задаче, условие отсутствия проскальзывания сводится для максимального угла к уравнению  $\operatorname{tg} \theta = \mu$ . Здесь, однако, скалолазка сталкивается с проблемой выбора. При угле меньшем, чем этот, сила трения больше, и скалолазка находится в большей безопасности, но это достигается ценой увеличения напряжения в ногах и бедрах скалолазки. Безусловно, общая гибкость скалолазки является важным фактором. У каждой скалолазки есть свой оптимальный угол с учетом ее роста, безопасности и нагрузки, при котором она чувствует себя наиболее комфортно и к которому она приходит естественным образом, через опыт.

Чтобы подняться по более широкой (или более узкой) расщелине, однако, скалолазка вынуждена отклоняться от этого угла. Не замечательно ли было бы, если бы скалолазка могла увеличивать или сокращать длину своих ног так, чтобы всегда использовать при восхождении свой оптимальный угол?

Можно представить, что именно такие мысли были исходным толчком для следующего важного шага в технологии восхождения, но сначала несколько слов о связи страхов и методов восхождения.

## Страхи

При надежной технике восхождения, силе и абсолютной уверенности в себе альпинисты не нуждались бы в веревках и других приспособлениях, используемых для обеспечения безопасности. Но реальность такова, что хотя все опытные альпинисты ходят в одиночку в те или иные моменты, большинство предпочитает безопасность, обеспечиваемую веревкой, особенно на новых или особенно трудных маршрутах или когда опасность создают падающие камни.

Когда скалолазка поднимается первой, волока веревку за собой, она должна как-то закрепить веревку на скале, чтобы даже сорвавшись, пролететь только удвоенное расстояние до ближайшей точки прикрепления. Скалолаз-партнер, или нанарник, находится ниже, вытравляя веревку по требованию и готовясь удержать свою спутницу в случае падения. Один из традиционных методов закрепления веревки использует крюки. Крюк — это стальной гвоздь, который забивают в трещину или щель скалы. Алюминиевое кольцо-защелка, называемое карабином, закреплено в отверстие выступающей головки крюка, а веревка продернута через карабин. Альпинисты всегда ощущали, что этот метод не является полностью приспосабливаемым.

Во-первых, вбить крюки в скалу — тяжелая работа, во-вторых, они серьезно повреждают скалу.

Недавно началось энергичное развитие «чистых» страховок — маленьких алюминиевых распорок и муфточек, которые служат почти тем же целям, что и крюки, но могут быть закреплены и удалены без ненужных усилий и повреждений скалы. Обычно такое страховочное приспособление надо протиснуть в щель или трещину скалы, а затем прикрепить к нему веревку с помощью карабина. (Если вы снова вернетесь к рисунку 4, вы увидите карабин, прикрепленный к тросу, который в свою очередь закреплен на страховочном приспособлении у ног альпиниста.)

Довольно долгое время наиболее сложным для конструкторов оставался

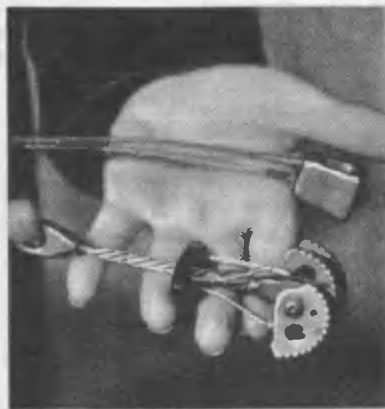


Рис. 5. Друз и муфта, прикрепляемые к карабину

вопрос крепления страховочных узлов в щелях с параллельными стенками, где нельзя ни крюк забить, ни новый страховочный узел заклинить. Эти щели представляют собой в основном очень узкие трубы (шириной 1–10 см). Многие такие возможные трассы подъема оставались неосвоенными, поскольку лишь немногие альпинисты были достаточно самоуверенны, чтобы пройти их без страховки. Элегантным решением было бы изобретение устройства, использующего трение, чтобы удержаться на месте даже при нагрузке. И это подводит нас к одному из красивейших применений физики в альпинизме.

### Друзья

К решению можно подойти примерно таким образом: давайте создадим устройство с двумя кулачками, которое имитирует альпинистку с рисунка 3. Альпинистка, как вы помните, могла удерживать ноги под оптимальным углом к стене только при одной определенной ширине трещины. Наше же устройство должно быть применимо для различных трещин и всегда действовать при оптимальном угле  $\theta$ . Для этого кулачки должны быть изготовлены с увеличивающимся радиусом кривизны  $r$ , так чтобы сохранять постоянный угол при увеличении ширины трещины. Такие устройства действительно были разработаны и носят общее название «кулачковые устройства с пружиной» (рис. 5). Одно из наиболее популярных из них выпущено на рынок с торговой маркой «Друз» (иногда вместо русского перевода используют английское слово «френд» — *прим. ред.*). Название настолько подходящее, что

я буду пользоваться им (без кавычек, но с большой буквы) в оставшейся части статьи. (Кстати, на рисунке 4 вы можете видеть небольшого Друза, помещенного в вертикальную трещину в скальной стенке на уровне ног, и другого — в щели чуть выше уровня глаз. Правильно размещенный Друз оказывается невидимым снаружи!)

Рассмотрим более детально силы, действующие на один из кулачков Друза, помещенного в вертикальную щель, как на рисунке 6. Это — сила  $N$  нормальной реакции со стороны скалы, сила трения  $F_{тр}$  между скалой и кулачком и силы  $R$  и  $P$  со стороны оси. Как же добиться того, чтобы все точки внешней поверхности кулачков были «в равном положении»? Иными словами, чтобы условие проскальзыва-

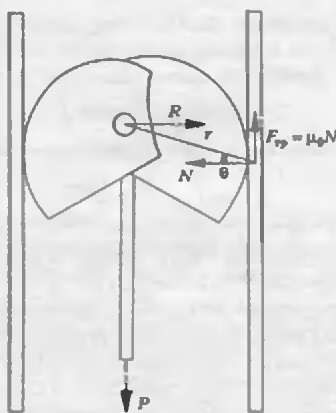


Рис. 6. Друз в вертикальной трещине с параллельными гранями. Это — классическое размещение Друза

ния было одинаковым для разных точек касания? Для этого надо придать кулачкам Друза такую форму, чтобы отношение  $F_{тр}$  и  $N$  было одинаковым для всех точек касания:

$$F_{тр} = \mu_0 N.$$

Тогда при любом коэффициенте трения  $\mu > \mu_0$  Друз не выскользнет из расщелины любой (не слишком большой) ширины. Записав уравнение моментов относительно точки шарнирного соединения кулачков:

$$F_{тр} r \cos \theta = N r \sin \theta,$$

получим фундаментальное уравнение для конструирования Друза:

$$\operatorname{tg} \theta = \mu_0 = \text{const.}$$

где  $\mu_0$  имеет смысл мини-

мального коэффициента трения для применимости Друза.

Какова должна быть форма кулачка, удовлетворяющего этому требованию? Любой математик угадает ответ немедленно. (Будучи физиком, я сперва получил решение, а потом почувствовал себя глупцом, когда обнаружил, насколько хорошо известен ответ!) Форма кулачка — это логарифмическая спираль, уравнение которой в полярных координатах  $(r, \alpha)$  имеет вид

$$r = r_0 \exp(-\alpha \operatorname{tg} \theta).$$

Здесь  $\theta$  — угол, который радиальное плечо кривой составляет с нормалью к касательной в любой точке кривой. Этот угол постоянен! Поскольку мы уже нашли, что шаг Друз должен удовлетворять условию  $\operatorname{tg} \theta = \mu_0$ , мы получаем уравнение спирали Друза, выраженное через минимальный коэффициент трения:

$$r = r_0 \exp(-\alpha \mu_0).$$

Эта кривая показана на рисунке 7. Для данного чертежа была выбрана величина  $\mu_0 = 0,3$ . Физически это соответствует алюминиевому кулачку на гладком граните. Различные марки кулачковых устройств имеют слегка различающиеся контактные углы, что придает каждому из них свой единственный характер. На график наложен эскиз реального кулачка.

На практике Друзья изготавливаются разных размеров — для щелей разной ширины, но внешний контур кулачка является участком той же самой спирали. Друз, размещенный правильно, сломается прежде, чем выскользнет из трещины с параллельными стенками.

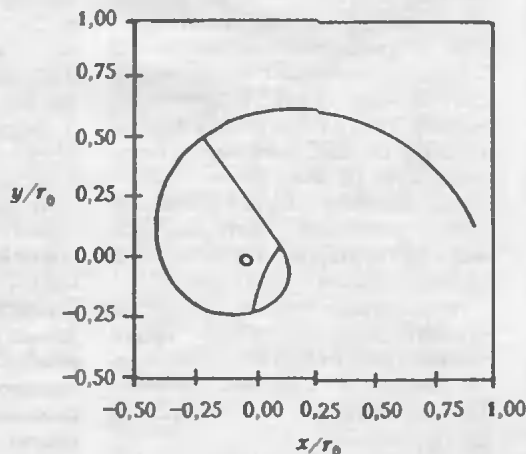


Рис. 7. График логарифмической спирали, на который наложен профиль реального кулачка

Эта поломка произойдет при нагрузке массой, заметно превышающей 1000 кг.

Итак, стою я на «лбу» скалы, размышляя обо всем этом, и вдруг мне приходит в голову, что при серьезном падении я вполне могу создать нагрузку намного больше этой. Вот здесь-то и вступает в игру веревка.

## Падение

Представьте себе падение на веревке, у которой динамические характеристики слабы или отсутствуют, т.е. на веревке, которая не растягивается. Предположите, что, пролетев некоторое расстояние, альпинистка приобретет направленный вниз импульс, который должен быть сведен к нулю за время  $\Delta t$  за счет действия веревки. Обозначив изменение импульса альпинистки  $\Delta p$ , мы видим, что средняя сила  $F_{cp} = \Delta p / \Delta t$ , действующая на альпинистку и страховочное приспособление, удерживающее веревку, может быть огромной, если время торможения мало, а высота падения была большой. Кроме того что эта сила может привести к тяжелым телесным повреждениям, слишком большая нагрузка на страховочное приспособление может вызвать его поломку или выдергивание из скалы, в результате чего возможен даже смертельный исход.

Вот почему альпинисты используют так называемые динамические веревки. Они всегда изготавливаются с четко заданной прочностью, и опытная скалолазка всегда учитывает эту прочность при анализе ситуации на восхождении.

МААС (Международная ассоциация альпинистских стандартов) установила следующее требование для веревки, разрешенных к применению. Масса 80 кг, удерживаемая веревкой длиной 2,8 м, должна создавать импульсную силу не более 12 кН. Далее веревки маркируются по числу таких испытательных падений, которые они могут выдержать (обычно восемь или девять). Небольшая порция физики поможет проиллюстрировать соображения конструкторов относительно современной скалолазной веревки.

Качество веревки характеризуется ее «модулем веревки»  $M = ES$  — произведением модуля Юнга  $E$  и поперечного сечения  $S$ . Типичное значение  $M = 40$  кН. Модуль Юнга определяется формулой

$$F = ES \frac{\Delta l}{l},$$

где  $F$  — натяжение веревки длиной  $l$ , которое вызывает удлинение веревки  $\Delta l$ . Отношение высоты падения к длине веревки между лидером и ее напарником называется фактором падения и характеризует серьезность падения. При максимальном факторе падения  $\Phi = 2$  высота падения равна двойной длине веревки (т.е. между лидером и ее напарником нет промежуточных точек страховки).

Чтобы найти, от чего зависит максимальное натяжение веревки  $F$ , запишем закон сохранения энергии. К моменту остановки скалолазка потеряет высоту  $h + \Delta l$ , а уменьшение потенциальной энергии тяготения равняется энергии упругой деформации веревки:

$$mg(h + \Delta l) = \frac{F}{2} \Delta l.$$

Используя определения модуля веревки и фактора падения ( $\Delta l = Fl/M$  и  $h = \Phi l$ ), получим уравнение

$$F^2 - 2mgF - 2mgM\Phi = 0.$$

Неотрицательное решение имеет вид

$$F = mg \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2M\Phi}{mg}} \right).$$

С данными теста МААС ( $\Phi = 1,8$ ,  $mg = 800$  Н) для веревки с  $M = 40$  кН получаем  $F \approx 11560$  Н, что очень близко к критическому. При таком падении относительное удлинение ( $\Delta l/l = F/M$ ) составляет примерно 29%. Наиболее серьезное падение — падение с фактором два — подвергает опасности и лидера, и напарника. Нейлоновые нити в сердцевине альпинистской веревки могут растянуться больше своего предела эластичности или даже порваться. При менее серьезном падении альпинистка может рассчитывать на 5–10-процентную податливость веревки для смягчения импульсной нагрузки. Во всех этих рассуждениях мы игнорировали массу веревки — примерно 73 г/м. Определение ее роли в практике восхождения представляет собой интересную задачу.

Что мы узнали в результате всего этого? «Безопасное» падение — не обязательно короткое: это падение с малым фактором падения ( $l$  и  $h$  не входят в ответ для  $F$  по отдельности, а только через  $\Phi$ ). Большая длина веревки между лидером и напарником, при закреплении страховочного приспособления не намного ниже лидера, приведет к небольшому импульсному силам, действующим на альпинистку и страховочное приспособление. Так

что альпинистки могут позволить себе больше рисковать в этом случае. А чтобы не создавать большого фактора падения в начале «подъема» от напарника, страховочные узлы надо устанавливать почаще.

## Вопросы для самостоятельных размышлений

Две скалолазки поднимаются по крутому склону. Лидер страхуется веревкой, которую держит приметельная напарница. Веревка между ними имеет длину 10 м и проходит через карабин, связанный с Другим, закрепленным в трещине скалы на 6 м ниже лидера (рис.8).

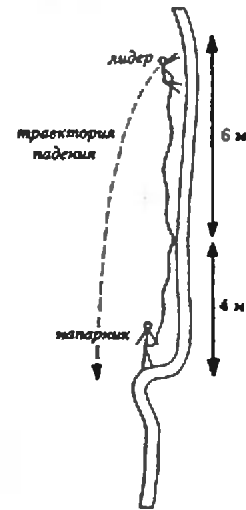


Рис.8. Лидер и напарник на крутом склоне

Масса лидера со снаряжением равна 80 кг. Лидер, утомленный сложным подъемом, ослабляет хватку и падает со скальной стенки. Веревка, привязанная к основанию, останавливает падение (происходящее по вертикали). Сила рыжка, который она испытывает, называется пиковым торможением; он может быть уменьшен за счет эластичности веревки.

1. Чему равен фактор падения для этого происшествия?
2. Какова величина шока торможения?
3. Какова величина отрицательного ускорения лидера за счет действия веревки, отнесенная к ускорению силы тяжести?
4. Как сильно удлинится веревка?
5. Вычислите шок падения в случае падения с фактором  $\Phi = 0$ .

Эта статья (с некоторыми исправлениями и сокращениями) перепечатывается из журнала «Quantum» (июль — август 1992 г.). Автор статьи д-р Джон Вайли преподает во Французской школе города Торонто и является Директором Канадских олимпиад по физике и химии. С английской статью перевел А. Уланцев.

# Этьен Малюс и его открытие

А. АНДРЕЕВ

**В** ИСТОРИИ физики работы Этьена Малюса (1775 — 1812) располагаются в тени более крупных работ его собратьев, великих французских физиков начала XIX века, хотя талант Малюса в свое время превозносили такие ученые, как Лаплас и Лагранж, Араго и Юнг. Замечательный физик-экспериментатор, знаток химии и инженерного дела, геометр, он был также и простым, открытым собеседником, стойким солдатом, прошедшим долгую войну, и, наконец, человеком огромного упорства и честолюбия, позволившим ему сделать быструю научную карьеру. Малюсу суждена была короткая жизнь (он умер на 37-м году жизни, из которых только 7 лет он посвятил занятиям физикой), но его научное наследие велико и могло бы стать еще больше.

Основные работы Малюса относятся к области оптики. Он начал свои опыты в те годы, когда постепенно складывалась прочная основа представлений о волновой природе света. Надо сказать, что к началу XIX века существовало две теории, объясняющие световые явления. Согласно одной из них, свет представляет собой поток частиц (корпускул), летящих прямолинейно, по законам механики. Отражение этих частиц на границе сред аналогично отражению упругих шариков, а преломление света при переходе из одной среды в другую объясняется более сильным притяжением частиц к одной из сред. Эта теория получила название корпускулярной, наиболее полно ее разработал Ньютон. Другая теория исходила из представлений о свете как о волне, бегущей в упругой среде — эфире, и объясняла отражение и преломление изменением направления волнового фронта. Основателем этой теории считается современник Ньютона голландский физик Гюйгенс.

Корпускулярная теория господствовала в науке в течение всего XVIII века, но на рубеже веков намечался переход к волновым представлениям о свете. В частности, физики давно заметили удивительные оптические свойства кристалла исландского шпата. Узкий пучок света, проходя через кристалл, разделяется на два луча:

один из них подчиняется обычному закону преломления и поэтому называется обыкновенным лучом, а другой не подчиняется и называется необыкновенным. Интересно, что луч раздваивается даже при нормальном падении на естественную грань кристалла: при этом необыкновенный луч уклоняется так, что угол преломления отличен от нуля (рис. 1). Было также обнаружено, что прошедшие

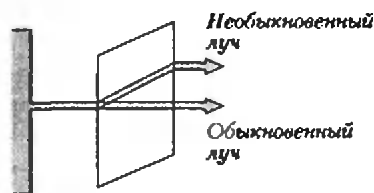


Рис. 1

через кристалл лучи меняют свои первоначальные свойства и при вторичном прохождении через кристалл уже не раздваиваются.

Это явление получило название двойного лучепреломления. Малюс обнаружил, что сходные явления наблюдаются при любом отражении света, и сделал вывод о существовании некоторого природного свойства света, которое проявляется в равных условиях. Для обозначения этого свойства Малюс ввел термин «поляризация», и с тех пор так называется раздел оптики, ставший одним из самых интересных и значительных.

Хотя всю свою жизнь Малюс придерживался корпускулярной теории, его открытие стало толчком к появлению множества работ, подтверждающих волновую теорию. Его опыты просты, их можно повторить в школьной лаборатории. Но прежде чем мы к ним обратимся, перелистаем некоторые страницы его биографии — мы увидим, что необычайному открытию предшествовала жизнь, столь же необычная, сколь и многотрудная, где были и опасности, и подвиги, и любовь, и слава.

## ЮНОСТЬ

Этьен Луи Малюс родился в Париже 23 июля 1775 года. О его родителях мы

знаем немного. Его отец, незначительный дворянин, занимал должность казначея. Это была выгодная должность, приносящая семье неплохой доход. Маленький Этьен получил домашнее образование, показав себя способным учеником. Его мать рано привила сыну склонность к античной поэзии. Малюс и повзрослев любил классических писателей, знал наизусть отрывки из Гомера, Анакреонта, Горация, Вергилия. Часто на досуге он писал латинские стихи (впрочем, как замечали друзья, это не относилось к самым сильным сторонам его таланта).

Другими любимыми предметами мальчика стали алгебра и геометрия, поэтому неудивительно, что в 1793 году Малюс поступает в Парижскую инженерную школу. Однако уже четвертый год шла Великая французская революция, и судьба распорядилась так, что школу закрыли перед самым выпуском учеников. Молодой инженер зачисляется добровольцем в один из батальонов парижского ополчения. Так началась его военная карьера.

Война в это время шла на севере Франции. В крепости Дюнкерк Малюсу поручают работу на полевых укреплениях. Один из инженеров, руководивших земляными работами, обратил внимание на неожиданное искусство в их производстве, и уже небольшой разговор с Малюсом показал инженеру, что перед ним молодой человек с яркими дарованиями. Как раз в это время в Париже была открыта Политехническая школа, и по настоянию этого инженера юноша, в котором угадывалось славное будущее, был зачислен одним из первых ее учеников.

Политехническая школа сразу стала одним из самых значительных учебных заведений Франции, где преподавали выдающиеся ученые — физики и математики. Обучение длилось два года и шло очень интенсивно. Из стен школы вышла целая плеяда французских физиков мировой величины.

Окончив Политехническую школу, Малюс отправился инженерным подпоручиком в действующую армию в Центральной Европе. Военные дороги привели его на правый берег Рейна. Одиннадцать месяцев он пробыл в гарнизоне старинного города Гисена.



Возможно, эти месяцы были счастливейшими для пылкого молодого человека. Он уже собирался жениться на старшей дочери канцлера университета профессора Коха, как получил приказ немедленно явиться в Тулон и поступить в состав экспедиционной армии, назначенной которой никому не было известно.

## Поход

Имя генерала Бонапарта властно вторгается в исторический ход нашего повествования. По всей Европе гремели войны, которые историки впоследствии назовут наполеоновскими, и близилась одна из их драматических страниц — египетский поход.

К 1797 году Англия оставалась единственным непобежденным врагом Французской республики. Слишком силен был английский флот во главе с адмиралом Нельсоном, и любая прямая атака на Британские острова неизбежно бы провалилась. Для победы над Англией Бонапарту необходим был удар в другом направлении — на Египет.

Снаряжая экспедицию, генерал Бонапарт предполагал провести широкое исследование «колыбели цивилизации», поэтому он решил взять с собой почти всю Французскую академию наук. Научный корпус возглавил преданный друг Наполеона, замечательный математик, один из создателей Политехнической школы Гаспар Монж. Подготовка к рискованному походу велась в стражайшей тайне. Отправляясь в первое свое морское плавание, Бонапарт больше рассчитывал на удачу, чем на собственные силы.

Итак, 27 февраля 1798 года в Тулоне Малюс сел на корабль, принадлежавший к авангарду «египетской» эскадры. 10 июня он участвовал в атаке Мальты. Адмирал Нельсон, задержанный бурей в Гибралтаре, в поисках французов разминуслся с ними неподалеку от острова Крит, и Малюс счастливо высадился вместе с остальным десантом на побережье Египта.

Кампания началась удачно, в нескольких ожесточенных сражениях плохо оснащенные египетские войска были разбиты. Малюс участвовал в знаменитой битве при пирамидах, где он не раз видел смерть лицом к лицу. Но не только войной наполнены дни Малюса в Египте: Гаспар Монж помнил о своем воспитателе и привлек его к работе по составлению «Описа-

ния Египта». Однажды во время картографирования местности наш инженер обнаружил развалины замечательного города Сана. Вскоре Бонапарт основывает в Каире Египетский институт, президентом которого избирается Монж, а Малюс становится одним из его членов.

После разгрома мамелюков Малюс некоторое время оставался в Каире, отсюда он выезжал в верхний Египет, руководил археологической и географической экспедицией в дельте Нила, посетил древние пирамиды Гизеа вместе со славным генералом Клебером. Молодой человек понравился генералу, и тот решил взять его с собой в поход в Сирию.

Как известно из истории, этот поход сложился для Бонапарта крайне неудачно. Малюс разделил все бедствия, постигшие французскую армию в Сирии. Однако, как храбрый офицер, он отличился при осаде города Яффы, где строил траншеи и прочие укрепления, а также участвовал в жестоким бою на улицах города.

## Чума

Когда армия Бонапарта выступила в поход для осады крепости Сен-Жан д'Акр, некогда одной из твердынь крестоносцев, а теперь служившей опорным укреплением войск султана, Малюс получил приказ остаться в Яффе. Из недр сирийской пустыни или, может быть, с высот ливанских гор к незванным гостям подбиралась одна из самых страшных болезней, пославших человечество, неизменная спутница войн и разрушений — чума. Болезнь шла по пятам французской армии. В гарнизоне, оставленном в Яффе, находились 300 раненых, 400 захваченных и только 50 здоровых солдат. Вокруг них город был мертв, на улицах еще свежи были следы недавнего разгрома. На одиннадцатый день Малюс захворал той же страшной болезнью. Записки Малюса лишь отчасти дают понять, что пережил он в эти дни, когда признаки чумы стали явными, окруженный умирающими товарищами.

Осада Акра затягивалась. Больные прибывали в Яффу и увеличивали число зараженных, чума была во всех жилых домах. Единственный слуга Малюса, усердно помогавший ему во время болезни, скончался в числе последних друзей нашего героя. Он остался один, без сил и без помощи.

Но Малюсу повезло: после месяца болезни он, наконец, сел на корабль, возвращавший его в Египет. Как он пишет, в дороге «морской воздух сильно на меня подействовал; мне казалось, что я освободился от удушья; противные ветры задерживали нас в море и тем много способствовали поправлению моего здоровья». Корабль бросил якорь неподалеку от дельты Нила, однако испытания инженерного капитана на этом не закончились. Он вынужден был провести месяц в карантине, в окружении больных, что замедлило его выздоровление. Но все кончилось благополучно — Малюс окончательно поправился и смог покинуть лазарет.

Эпидемия чумы поставила армию Бонапарта на грань катастрофы. В этих условиях он не мог уже добиваться выгодного для себя перемирия, и к тому же все сильнее ощущалась нехватка продовольствия. Научная деятельность Каирского института постепенно сходила на нет; в те же дни, когда Малюс борется с болезнью, опасно заболевает Гаспар Монж (к счастью он вскоре выздоровеет). А тем временем победоносные войска русского полководца Суворова разбивают французов в Италии. Фортуна, столь долго покровительствовавшая Бонапарту, казалось, ему изменила.

## Возвращение

Через некоторое время после выздоровления Малюс получил приятное назначение, больше похожее на отпуск. Солдаты гарнизона, куда его откомандировали, жили в жилищах из пальмовых листьев, подражая образу жизни арабов. Возле хижины мирно паслись лошади и верблюды, птичник был наполнен курами, гусями и утками. Совершенное спокойствие, мирные забавы благотворно действовали на Малюса; здесь он решил заняться физикой и написал расуждение о природе, где подробно обсуждал основные положения корпускулярной теории.

Между тем события во французской армии развивались следующим образом. В августе 1799 года генерал Бонапарт решает покинуть войска и вернуться в Париж. К этому его вынуждала очевидная неудача похода в Сирию, осложнившаяся ситуацией в Европе, грозившая лишить его всей достигнутой власти. Командование армии принял недавний товарищ Ма-

люса генерал Клебер. Несмотря на некоторые частные успехи, положение экспедиционной армии все ухудшалось. Малюс вернулся в строй и вновь участвовал в сражениях. Однако вскоре храбрый генерал пал от руки фанатика-турка, после чего управление армией ослабло, и осенью 1801 года она сложила оружие.

Малюс возвращается во Францию, сохранив прежнюю сердечную привязанность. В течение всех трех лет кампании он получал письма из Гисена; теперь, наконец, он может жениться на Луизе Кох. Этот союз был счастливым.

Еще 10 лет военная карьера бросала Малюса в разные концы Европы. К 1810 году он достиг чина инженерного майора, но научные интересы тянули его в Париж, и в августе 1810 года бесстрашный солдат наполеоновской армии избирается членом Французской академии наук. Почетное место в обществе крупнейших ученых Европы он занял по праву, так как к этому времени Малюс уже открыл и описал явление, благодаря которому его имя сохранится в истории науки, — поляризацию света.

## Открытие

4 января 1808 года Академия наук предложила на соискание премии следующий вопрос: «Составить проверенную опытом математическую теорию двойного преломления света в различных кристаллических веществах». Объявленную награду получил рассуждение Малюса. К этому времени он был уже известен как автор трактата по аналитической оптике, в котором обобщал некоторые частные геометрические способы построения характерных оптических поверхностей. Он также представил академии экспериментальную работу по измерению показателя преломления прозрачного и непрозрачного воска по способу Волластона. Поэтому его победа не была слишком неожиданной. Его новая работа, как и предыдущие, была благосклонно встречена комиссией, куда входили Лагранж, Гайю, Гей-Люссак и Био. Следует, однако, отметить, что, боясь, чтобы кто-нибудь из соискателей не предупредил его открытием замеченных им новых свойств света, Малюс существенную часть своей работы сообщил академии 12 декабря 1808 года, не дожидаясь окончания срока конкурса. Итак,

его открытие нужно отнести к концу 1808 года.

Изложим кратко последовательность наблюдений Малюса. Выше мы уже рассказывали, что узкий луч света, проходя сквозь кристалл исландского шпата, разделяется на два луча — обыкновенный и необыкновенный. Если мы теперь заставим один из этих лучей вновь пройти через второй такой же кристалл, то двойное лучепреломление будет не всегда. Интересно, что вращая второй кристалл вокруг направления светового луча, мы можем найти положение, при котором сквозь кристалл идет один луч, преломляющийся обыкновенно, и положение, при котором один луч в кристалле преломляется необыкновенно. В промежуточных случаях из второго кристалла выйдут два луча, но разной интенсивности.

Эти свойства были открыты Гюйгенсом в конце XVII века. И вот однажды в своем доме на улице Анфер в Париже Малюс посмотрел сквозь кристалл с двойным преломлением на солнечные лучи, отражаемые стеклами Люксембургского дворца, находившегося напротив его квартиры. Вращая свой кристалл, он вдруг заметил, что изменение в преломлении прошедшего луча, как если бы тот уже один раз миновал кристалл исландского шпата. Вместо двух ожидаемых равносильных изображений, Малюс смог увидеть только одно — то обыкновенное, то необыкновенное. Это странное явление сильно поразило нашего ученого: он пытался объяснить его переменами света в атмосфере. Но с наступлением ночи свет восковой свечи подтвердил дневные опыты, только на этот раз Малюс наблюдал отражение от поверхности воды. Таким образом ученый понял, что свет меняет свойства, или «поляризуется», не только проходя сквозь кристалл исландского шпата, но и при любом отражении от поверхности тела. Поэтому поляризация является одним из фундаментальных свойств света.

Малюс писал в своей работе: «В определенных условиях воздействие на свет ряда веществ приводит к тому, что отраженные и преломленные лучи приобретают признаки и свойства, существенно отличающиеся от лучей непосредственно излученного света. Свойство света, которое я собираюсь описать, связано с изменениями подобногородом. Это специфическое свойство наблюдалось ранее при опреде-

ленных условиях в виде появления двойного изображения при прохождении света через известковый шпат. Считалось, однако, что это явление связано только со свойствами данного кристаллического вещества, и не предполагалось, что область распространения этого явления может охватывать не только все кристаллические вещества, дающие двойное лучепреломление, но также все другие твердые и жидкие, прозрачные и даже непрозрачные тела».

Вот что такое поляризация с современной точки зрения. Из электромагнитной теории света вытекает непосредственно, что световые волны поперечны. Это значит, что векторы напряженности электрического поля  $E$  и индукции магнитного поля  $B$  перпендикулярны к направлению распространения световой волны, к тому же эти векторы перпендикулярны между собой (рис. 2). Если нам задано направление луча  $\vec{v}$ , мы можем располо-

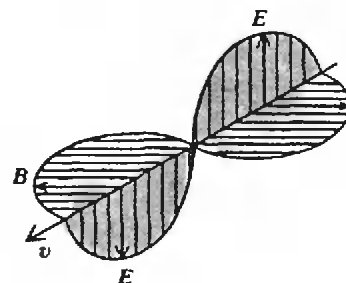


Рис. 2

жить  $\vec{E}$  (и соответственно  $\vec{B}$ ) в плоскости, перпендикулярной лучу, произвольным образом. Так и происходит в естественном солнечном свете, где все направления  $E$  в этой плоскости равновероятны. Но в кристалле ситуация меняется, в силу особенностей кристаллической решетки появляется выделенное направление в плоскости одной из граней, называемое оптической осью. Так происходит из-за того, что атомы, образующие кристалл, не симметрично расположены в разных направлениях. Если луч падает на эту грань, равномерность направлений  $E$  теряется и луч поляризуется. Таким образом, полностью поляризованный луч — это луч со строго фиксированной тройкой векторов  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$ . При двойном лучепреломлении необыкновенный и обыкновенный лучи являются полностью поляризованными лучами, причем направление  $\vec{E}$  в одном луче перпендикулярно направ-



лению  $\vec{E}$  в другом и параллельно оптической оси. Можно представить себе кристалл, сильно поглощающий один из этих лучей, тогда на выходе из него получится один поляризованный луч света. Такой кристалл называют поляризатором (сегодня физики используют в этом качестве, например, турмалин).

## Опыты

Рассмотрим подробно схему Малюса (рис. 3). Пусть параллельный пучок естественного света падает на стеклянное зеркало  $Z$  под углом  $\varphi$ . Отраженный луч проходит через пластину турмалина  $T$ , которую можно поворачи-

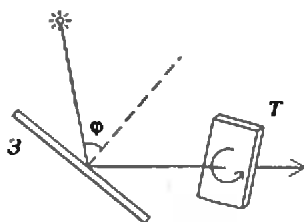


Рис. 3

чивать вокруг отраженного луча. При повороте глаз наблюдателя видит ослабление и усиление света. При этом интенсивность света доходит до минимума, когда плоскость, проходящая через ось кристалла, параллельна плоскости падения на зеркало, интенсивность достигает максимума при повороте  $T$  из этого положения на  $90^\circ$ . Если бы отраженный луч сохранял свойства естественного света, то, вращая турмалин, мы не заметили бы изменения интенсивности луча (как и происходит, если посмотреть сквозь турмалин прямо на Солнце). Напротив, если бы отраженный луч был полностью поляризован, т.е. имел зафиксированное направление  $\vec{E}$ , то в положении, когда оптическая ось  $T$  перпендикулярна  $\vec{E}$ , турмалин не пропускал бы света совсем. В нашем опыте этого не наблюдалось. Таким образом, поляризация света, отраженного стеклом, является частичной, т.е. отраженный луч представляет собой смесь естественного света с некоторой частью поляризованного. Изменяя угол наклона зеркала к лучу, мы убеждаемся, что доля поляризованного света зависит от величины угла падения  $\varphi$ . Оказывается, что с возрастанием угла  $\varphi$  доля поляризованного света растёт, и при определенном его значении отраженный свет оказывается пол-

ностью поляризованным. Величина этого угла полной поляризации зависит от относительного показателя преломления  $n$  и определяется соотношением  $\operatorname{tg} \varphi_0 = n$ . При дальнейшем увеличении угла падения доля поляризованного света вновь уменьшается. Это соотношение было выведено в 1815 году Брюстером из требования, чтобы при падении луча под углом  $\varphi_0$  преломленный луч был бы перпендикулярен отраженному (покажите это!). Сам Малюс экспериментально установил в своих опытах, что  $\varphi_0$  для воды равен  $53^\circ$ .

Надо сказать, что, открыв поляризацию, Малюс не имел в своем распоряжении кристалла турмалина, однако ему хотелось получать широкие пучки поляризованного света. Здесь ему опять помогло «люксембургское» стекло. Малюс заметил, что когда отраженный под углом  $\varphi_0$  свет полностью поляризован, то и поляризация преломленного луча максимальна и составляет около 15%. Поэтому, если сложить несколько пластинок стекла вместе и заставить луч пройти сквозь них, падая под углом  $\varphi_0$ , на выходе будет уже свет, поляризованный в значительной степени. Его плоскость поляризации (которую задает выделенное направление вектора  $\vec{E}$ ) совпадает с плоскостью падения луча.

Малюс также установил, как меняется интенсивность полностью поляризованного света  $I$  при прохождении его через второй поляризатор. Если  $\alpha$  — угол между оптической осью поляризатора и тем же положением, при котором интенсивность максимальна, то  $I = I_0 \cos^2 \alpha$ . Геометрически этот закон означает, что поляризатор пропускает только ту компоненту вектора  $\vec{E}$ , которая параллельна оптической оси (рис. 4), а интенсивность пропорциональна  $E^2$  (но ведь Малюс не допускал волновой теории света!).

Дальнейшее развитие идеи Малюса получили в опытах по интерференции поляризованных лучей двух других знаменитых французских физи-

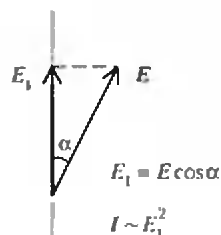


Рис. 4

ков Френеля и Араго (1816 г.). Френелю принадлежит также ответ на вопрос о доле поляризации отраженного и прошедшего сквозь диэлектрик света (так называемые формулы Френеля). К сожалению, Малюс уже не увидел этих новых достижений.

## Слава

Открытие Малюса несколько лет приносило ему заслуженную славу. Очень ревностно оберегал он свой приоритет и даже не на шутку обиделся на одного из академиков, который попробовал оспаривать этот приоритет в одном частном опыте. К Малюсу пришло мировое признание, из Англии ученый секретарь Королевского общества Томас Юнг в самых вежливых выражениях уведомил Малюса о присуждении ему медали Румфорда и признавался, что его работа заставила усомниться в правильности теории интерференции, которую Юнг разрабатывал уже несколько лет (!).

Вершиной научной карьеры Малюса, было избрание его в состав «сороска бессмертных», как во Франции называют членов Академии наук. Друг Малюса Франсуа Араго вспоминает, что в день избрания он дал слово немедленно сообщить о результате голосования, но по какой-то причине голосование запаздывало, и непредвиденная отсрочка заставила великого физика подумать, что он потерпел неудачу, — эта мысль привела его в отчаяние, и даже любящая жена не могла его утешить. Так бесстрашный воин пал духом от мимолетной неудачи на академических выборах; Араго видит здесь яркое доказательство значения академий в жизни науки.

В 1810 году Малюс становится экзаменатором Политехнической школы. Эта должность была несколько выше должности обычного преподавателя: экзаменатор проверял и уровень подготовки воспитанников, и уровень преподавания профессоров. Через год Малюс исполняет обязанности директора (после ухода на отдых престарелого Монжа), и для утверждения в этой должности не хватало только нескольких уставных формальностей. После военных трудов молодости он был окружен всем, что составляет счастливую жизнь человека, друзья наделись на его новые открытия, когда неожиданная и скоротечная чахотка унесла его жизнь. Малюс прожил неполных 37 лет.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1995 года по адресу: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 95» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1501» или «Ф1508». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

## Задачи М1501 — М1510, Ф1508 — Ф1517

М1501. Про числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$  известно, что для всех  $x$

$$|a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + a_n \sin nx| \leq |\sin x|.$$

Докажите, что  $|a_1 + 2a_2 + \dots + na_n| \leq 1$ .

В. Сендеров

М1502. Прямая отсекает от правильного  $2n$ -угольника со стороны 1 треугольник  $APQ$  так, что  $AP + AQ = 1$  ( $A$  — вершина  $2n$ -угольника). Найдите сумму углов, под которыми отрезок  $PQ$  виден из всех вершин  $2n$ -угольника, кроме  $A$ .

В. Произволов

М1503. Все натуральные числа раскрашены в два цвета — черный и белый. Известно, что сумма черного и белого — черная, а произведение черного и белого — белое.

а) Докажите, что произведение двух белых — белое.

б) Опишите все возможные варианты раскраски.

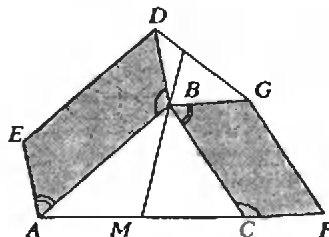
П. Филевич

М1504. а) Существуют ли натуральные числа  $a, b, c$  такие, что из двух чисел  $a/b + b/c + c/a$  и  $b/a + c/b + a/c$  ровно одно — целое?

б) Докажите, что если они оба целые, то  $a = b = c$ .

А. Грибалко

М1505. Вершины  $A, B$  и  $B, C$  треугольника  $ABC$  служат соответственными вершинами двух подобных друг другу параллелограммов  $ABDE$  и  $BCFG$ , построенных



на сторонах  $AB$  и  $BC$  вне треугольника. Докажите, что медиана  $BM$  треугольника  $ABC$  при продолжении образует с прямой  $DG$  углы, равные углам параллелограммов.

В. Дубровский

М1506. Докажите, что любой отрезок числовой оси можно разбить на несколько черных и белых отрезков так, что суммы интегралов а) от любого квадратного трехчлена, б) от любого многочлена степени не выше  $n$  по белым и по черным отрезкам равны.

Г. Кондаков

М1507. Четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности с центром  $O$ ;  $M$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $O$  на прямую  $AC$ . Докажите, что точка  $O$  равноудалена от  $BM$  и  $DM$ .

С. Маркелов

М1508. Геологи взяли с собой 80 банок консервов. Массы всех банок известны (имеется список) и различны. Этикетки на банках потерялись, и лишь один завхоз

знает, где что. Он хочет доказать это окружающим, используя только список и чашечные весы со стрелкой, показывающей разность весов грузов на одной и другой чашке. Докажите, что он а) может сделать это за четыре взвешивания, б) не может за три.

*А. Толпыго*

**M1509.** На плоскости расположены несколько точек, соединенные дугами. На каждой дуге написано одно из чисел 1, 2, 3. Пусть в каждой точке сходятся ровно три дуги, занумерованные разными числами. Припишем каждой точке знак «+» или «-», в зависимости от того, в каком порядке — по часовой стрелке или против — встречаются номера 1, 2, 3 входящих в нее дуг. Докажите, что разность между числом положительных и отрицательных точек делится на 4.

*С. Дужин*

**M1510\*.** Докажите, что существует

а) хотя бы одно составное число  $n$  такое, что  $3^{n-1} - 2^{n-1}$  делится на  $n$ ;

б) бесконечно много таких составных  $n$ .

*В. Сендеров*

**Ф1508.** На стальной стержень радиусом  $R$  надето с натяжением тонкое резиновое кольцо. Сила натяжения кольца  $T$ . Какую силу нужно приложить, чтобы сдвинуть кольцо вдоль стержня? Сила распределена по кольцу равномерно, коэффициент трения на границе сталь — резина  $\mu$ .

*А. Андрианов*

**Ф1509.** Шероховатый шкив вращается с постоянной угловой скоростью, ось шкива горизонтальна. Через шкив перекинута легкая нерастяжимая нить, к концам которой прикреплены два груза. При нулевой начальной скорости грузов один из них имеет ускорение, равное  $a$ , и направленное вверх. Если поменять направление вращения шкива, то при тех же условиях этот груз имеет ускорение, равное  $a_2$  и направленное вниз. Найдите отношение масс грузов.

*С. Варламов*

**Ф1510.** Жесткий невесомый стержень подвешен при помощи шарнира одним концом к потолку. К середине стержня и ко второму его концу прикреплены два одинаковых маленьких тяжелых груза. Стержень свободно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, образуя с ней угол  $\alpha$ . Чему равен угол между вертикалью и силой, с которой средний груз действует на стержень?

*А. Якута*

**Ф1511.** В горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вращается гладкая штанга, на которую надета муфта, прикрепленная к оси вращения при помощи легкой пружины. Муфта описывает окружность при относительном удлинении пружины, равном 0,25. Если муфту немного сместить вдоль вращающейся штанги и затем отпустить, она начнет колебаться. Определите период этих колебаний. Размерами муфты пренебречь.

*В. Петерсон*

**Ф1512\*.** Спутник движется вокруг Земли на высоте нескольких десятков километров. Когда начали наблюде-

ние за ним, высота спутника за один оборот уменьшилась на 1 метр. Оцените число оборотов спутника до падения его на Землю. Землю считайте совершенно круглой, а температуру и газовый состав атмосферы — неизменными на всех высотах.

*С. Панков*

**Ф1513.** Капля воды радиусом 2 мм находится в невесомости. Оцените частоту собственных колебаний капли. Плотность воды  $1 \text{ г/см}^3$ , коэффициент поверхностного натяжения  $0,07 \text{ Н/м}$ .

*К. Бедов*

**Ф1514.** Прямоугольная проволочная рамка размером  $a \times b$  сделана из куска тонкой проволоки массой  $m$  и общим сопротивлением  $R$ . Рамка движется поступательно со скоростью  $v_0$  вдоль стороны  $b$  и влетает в область между полюсами магнита, создающего магнитное поле. Индукция магнитного поля равна  $B_0$  и перпендикулярна плоскости рамки. Может ли рамка оказаться целиком в магнитном поле? Границу поля считайте резкой, индуктивностью рамки можно пренебречь.

*А. Якута*

**Ф1515.** Стабилитрон — полупроводниковый прибор, который отличается от обычного диода тем, что при некотором обратном напряжении  $U_0$  начинает очень хорошо проводить электрический ток (стабилитрон «пробиивается»). Такой стабилитрон подключают последовательно с катушкой индуктивности  $L$  к заряженному до напряжения  $U = 3U_0$  конденсатору емкостью  $C$ . Считая, что в прямом направлении стабилитрон идеально проводит ток, найдите полное количество теплоты, которое выделится в цепи.

*З. Рафаилов*

**Ф1516.** Трансформатор имеет две одинаковые обмотки, намотанные на тороидальный сердечник. Индуктивность каждой обмотки  $L$ , активное сопротивление провода пренебрежимо мало. К источнику переменного напряжения частотой  $\omega$  подключают одну из обмоток непосредственно, а другую — последовательно с резистором сопротивлением  $R$ . Найдите сдвиг фаз между напряжением и током источника. Рассеяние магнитного потока мало, внутреннее сопротивление источника равно нулю.

*Р. Александров*

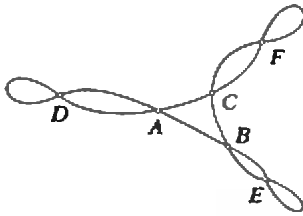
**Ф1517.** Симметричную рассеивающую линзу, оптическая сила которой — 10 дптр, используют в качестве зеркала. При этом получаются два изображения удаленного предмета — размер одного в 2,5 раза больше другого. Определите по этим данным коэффициент преломления стекла, из которого сделана линза, и радиус кривизны поверхности линзы.

*А. Зильберман*

## Решения задач M1471—M1480, Ф1488—Ф1497

**M1471.** Лыжник проехал через каждую из  $n$  деревьев по 2 раза и вернулся в исходную точку. Всегда ли по его лыжне можно проехать так, чтобы в каждой из этих  $n$  деревьев побывать ровно один раз (возвращаться в исходную точку не обязательно)?

Ответ: нет, не всегда. Пример приведен на рисунке. Предположим, что существует путь (по некоторым из линий на рисунке), проходящий через каждую из шести



деревень только один раз. Из трех деревень D, E, F найдется хотя бы одна, которая не является ни первой, ни последней на таком пути. Пусть это, скажем, деревня D. Но тогда непосредственно перед ней и за ней путь проходит через A. Противоречие.

Н. Васильев, М. Гервер

М1472. При каких натуральных  $n > 1$  в таблице

1	2	3	...	$n-1$	$n$
$n$	1	2	...	$n-2$	$n-1$
$n-1$	$n$	1	...	$n-3$	$n-2$
-----					
3	4	5	...	1	2
2	3	4	...	$n$	1

можно выбрать  $n$  разных чисел в разных строках и разных столбцах?

Ответ: при нечетном  $n$  — можно, при четном — нельзя. Будем считать, что таблица состоит из клеток  $(x; y)$ , где  $x$  и  $y$  — целые числа от 1 до  $n$ , причем в клетке  $(x; y)$  стоит число  $f(x; y)$  от 1 до  $n$  такое, что

$$f(x; y) \equiv x + y \pmod{n},$$

т.е. разность  $f(x; y) - (x+y)$  делится на  $n$ . (Очевидно, это расположение чисел — такое же, как в условии).

Если выбраны числа в клетках  $(x_i; y_i)$ , стоящих в разных строках и разных столбцах ( $i=1, 2, \dots, n$ ), то среди  $x_i$  и среди  $y_i$  каждое число  $1, 2, \dots, n$  встречается по разу, поэтому

$$x_1 + \dots + x_n = y_1 + \dots + y_n = n(n+1)/2.$$

Если все числа  $f(x_i; y_i)$  различны по модулю  $n$ , то и сумма

$$(x_1 + y_1) + \dots + (x_n + y_n) = n(n+1)$$

должна равняться  $n(n+1)/2$  по модулю  $n$ . Но если  $n$  четно,  $n=2k$ , то разность

$$2k(2k+1) - k(2k+1) = k(2k+1)$$

не делится на  $n=2k$ , так что выбрать числа требуемым образом нельзя.

Если же  $n$  нечетно, то достаточно выбрать числа  $f(x; y)$  в клетках  $x = y$ , идущих по диагонали, где все они различны (числа  $2, 4, \dots, 2n$  дают разные остатки при делении на  $n$ ).

**Замечание.** Эта задача — по существу другая формулировка двух более известных:

(1) Можно ли выписать две перестановки чисел  $1, 2, \dots, n$  одну под другой так, чтобы суммы чисел по столбцам давали различные остатки от деления на  $n$ ?

(2) Пусть  $n$  штырьков радиолампы и  $n$  соответствующих гнезд розетки, в которую она втыкается, расположены по кругу в вершинах правильного  $n$ -угольника. Можно ли штырьки и гнезда занумеровать числами  $1, 2, \dots, n$  так, чтобы при любом втыкании лампы в розетку ровно один штырек попадал в гнездо с тем же номером?

Ответ, конечно, тот же, что и в задаче М1472.

Н. Васильев, А. Савин

М1473. Пусть  $c_n$  — первая цифра числа  $2^n$  (в десятичной записи). а) Сколько единиц среди первых 1000 членов этой последовательности? б) Докажите, что в последовательности

$$c_1 = 2, c_2 = 4, c_3 = 8, c_4 = 1, c_5 = 3, \dots$$

встретится ровно 57 различных «слов»  $c_k c_{k+1} \dots c_{k+12}$  длины 13.

а) Ответ: 301. Отметим на «логарифмической шкале»  $y = \lg x$  числа  $x = 2^n$  (каждая следующая отметка получается из предыдущей сдвигом на расстояние  $\lg 2$ ). Число  $x$  начинается с 1, если  $10^k \leq x < 2 \cdot 10^{k+1}$  для некоторого  $k$ ; соответствующие интервалы на рисунке 1 заштрихованы

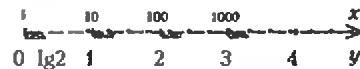


Рис. 1

ваны (поскольку длина интервала как раз равна  $\lg 2$ , на каждый из них попадает ровно одна отметка). Поскольку

$$\lg 2 = 0,30103 \dots, 10^{301} \leq 2^{1000} < 10^{302},$$

так что  $2^n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots, 1000$ ) ровно 301 раз перейдет через степень 10 и поэтому (не считая  $2^0=1$ ) 301 ее член начинается с 1.

б) Чтобы более детально разобраться в закономерностях последовательности  $c_n$ , свернем логарифмическую шкалу  $y = \lg x$  в «логарифмический круг»  $z = y - [y]$ : каждый отрезок от  $10^k$  до  $10^{k+1}$  дает новый оборот круга, а точки  $0 = \lg 1, \lg 2, \lg 3, \dots, \lg 9$  — границы интервалов, в которых расположены значения  $z$ , соответствующие различным первым значащим цифрам числа  $x$  от 1 до 9 (см. рисунок 2). Прежде чем решать задачу б), объясним идею рассуждения на более простом примере: выясним, сколько разных пар  $(c_k, c_{k+1})$  цифр встречается в нашей последовательности. (Конечно, ответ — 13 — мож-

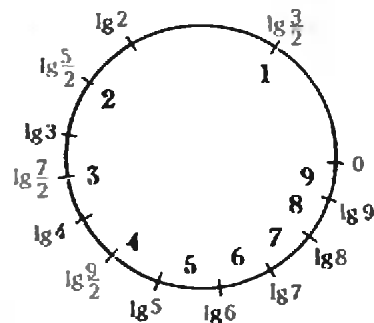


Рис. 2

но получить и простым перебором.) Мы должны выяснить, во сколько разных пар из 9 интервалов  $I_1, \dots, I_9$  попадают пары точек  $z, z + \lg 2$  окружности (конечно, здесь сумма берется «по модулю 1», т.е.  $z + \lg 2$  — точка, получающаяся из  $z$  «поворотом» на  $\lg 2$ ). Для этого достаточно к 9 точкам деления  $0, \lg 2, \dots, \lg 9$  на окружности добавить еще те, при прибавлении к которым  $\lg 2$  получается одна из этих 9 точек деления (новые точки деления на рисунке показаны красным). Тогда окружность разобьется на более мелкие интервалы  $\Delta$  так, что для всех  $z$  из каждого  $\Delta$  пара  $z, z + \lg 2$  попадает в одну и ту же пару интервалов  $I_1, \dots, I_9$ , а  $z$  из разных  $\Delta$  дают разные пары цифр.

Точно так же можно разобраться и со «словами» любой длины.

Пусть

$$R: z \rightarrow z + \lg 2 \pmod{1}$$

— поворот окружности, соответствующий умножению на 2:  $x \rightarrow 2x$ ;  $L = R^{-1}$  — обратное к  $R$  преобразование  $z \rightarrow z - \lg 2 \pmod{1}$ . Чтобы проследить, в какие именно интервалы могут попадать последовательности точек длины 13:

$$z, Rz, \dots, R^{12}z, \tag{1}$$

— т.е. какие возможны последовательности цифр

$$c_0, c_{k+1}, \dots, c_{k+12} \tag{2}$$

— достаточно выяснить, на сколько интервалов будет разбит круг точками

$$\lg k, L(\lg k), \dots, L^{12}(\lg k),$$

где  $k = 1, 2, \dots, 9$ . Для точек  $z$  из каждого интервала  $\Delta$  между этими точками получится своя последовательность «номеров» (2). Заметим, что поскольку

$$L(\lg 2), L(\lg 4) = \lg 2, L(\lg 6) = \lg 3,$$

$$L(\lg 8) = \lg 4 \text{ и } L(\lg 1) = \lg 5$$

(весь  $\lg 1$  на окружности совпадает с  $\lg 10$ ), то среди точек  $L(\lg k)$  появляется лишь четыре новых  $L(\lg 3) = \lg \frac{3}{2}$ ,  $L(\lg 5) = \lg \frac{5}{2}$ ,  $L(\lg 7) = \lg \frac{7}{2}$  и  $L(\lg 9) = \lg \frac{9}{2}$ , отмеченных на рисунке красным цветом; точно так же, среди точек  $L^{n+1}(\lg k)$  по сравнению с  $L^j(\lg k)$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) появляется лишь четыре новых, соответствующих  $k = 3, 5, 7$  и 9. Таким образом, среди точек

$$L^i(\lg k), 0 \leq i < n, 1 \leq k \leq 9$$

будет всего  $4n + 5$  различных (при  $n = 1$  их число равно 9, при  $n = 2 - 13$ ). В частности, при  $n = 13$  получим ответ:  $4 \cdot 13 + 5 = 57$ .

Осталось только заметить, что последовательность точек  $z_n$ , соответствующих числам  $2^n$ , будет «всюду плотной» на окружности — это следует из иррациональности  $\lg 2$  (если бы некоторый интервал  $\delta$  был свободен от точек  $z_n$  — мы могли бы выбрать его максимальным влево и вправо, — то интервалы  $\delta, R\delta, R^2\delta, \dots$  не могли бы пересекаться). Значит, в каждом интервале  $\Delta$  будет хоть одна точка  $z_n$ .

Участники Турнира городов, решавшие эту задачу, сумели обойтись и без «логарифмического круга»: некото-

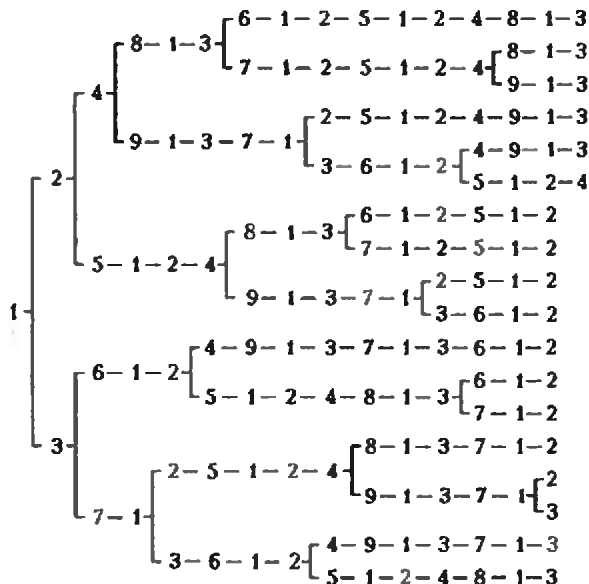


Рис.3

рые «в лоб», с помощью перебора и оценок, выяснили, какие наборы цифр  $c_n$  могут следовать друг за другом (в этом помогает разобраться рис.3).

А.Васильев, А.Канель

**M1474.** На плоскости дан единичный вектор  $\vec{v}_1$ . Разрешается провести любую прямую и построить (ортогональную) проекцию вектора  $\vec{v}_2$  на эту прямую, затем точно так же из вектора  $\vec{v}_2$  получить  $\vec{v}_3$  и т.д. Можно ли добиться того, что вектор  $\vec{v}_n$  (при некотором  $k$ ) будет перпендикулярен  $\vec{v}_1$  и при этом иметь длину не менее 0,99?

Ответ: можно.

Все дело в том, что  $\cos x$  при малом  $x$  отличается от 1 на очень малую величину порядка  $x^2/2$ .

Докажем, например, что если  $\vec{v}_k$  — проекция  $\vec{v}_{k-1}$  на прямую, составляющую с  $\vec{v}_{k-1}$  угол  $x = \pi/360$  (в полградуса), а с  $\vec{v}_1$  — угол  $(k-1)x$ , то  $\vec{v}_{k-1}$  имеет длину больше 0,99; он, конечно, перпендикулярен  $\vec{v}_1$ .

Нам потребуются два простых неравенства:

$$\cos x = 1 - \sin^2 x/2 > 1 - x^2/2, \tag{1}$$

вытекающее из  $\sin x < x$  (при  $x > 0$ );

$$(1-y)^n \geq 1 - ny \tag{2}$$

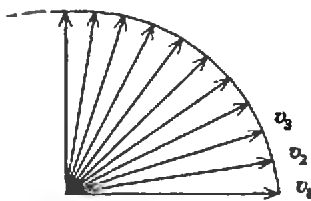
при  $0 \leq y < 1$ , легко доказываемое по индукции: если (2) выполнено, то

$$(1-y)^{n+1} \geq (1-ny)(1-y) = 1 - (n+1)y + ny^2 \geq 1 - (n+1)y.$$

Из (1), (2) и  $\pi^2 < 10$  следует:

$$\left(\cos \frac{\pi}{360}\right)^{180} > \left(1 - \frac{\pi^2}{2 \cdot 360^2}\right)^{180} \geq 1 - \frac{\pi^2 \cdot 180}{2 \cdot 360^2} =$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{1080} > 1 - \frac{10}{1000} = 0,99.$$



**Замечание.** Если векторы  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$  откладывать от одной точки  $O$  (см. рисунок), то их концы будут лежать на «логарифмической спирали», уравнение которой в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  имеет вид  $r = q^\varphi$ : длина  $r(n)$  вектора  $\vec{v}_{n+1}$  равна  $\cos^2(\pi/360)$ , а угол  $\vec{v}_{n+1}$  с  $\vec{v}_1$  равен  $\varphi(n) = \pi n/360$ , поэтому  $r(n) = q^{\varphi(n)}$ , где  $q = \cos^{360/\pi}(\pi/360)$ .

Н. Васильев

**M1475.** Полоска размером  $1 \times n$  разбита на единичные квадраты. В квадраты записывают числа  $1, 2, \dots, n$ . Сначала в один какой-нибудь квадрат пишут число 1, затем число 2 записывают в один из соседних квадратов, затем число 3 — в один из соседних с уже занятыми и т.д. (произвольными являются выбор первого квадрата и выбор соседа на каждом шаге). Сколькими способами это можно проделать?

Ответ:  $2^{n-1}$  способами.

Это проще всего объяснить, расставляя числа «с конца»: число  $n$  должно попасть в крайнюю (левую или правую) клетку полоски  $1 \times n$ , затем число  $n-1$  — в крайнюю клетку оставшейся полоски  $1 \times (n-1)$ , ..., число 2 — в крайнюю клетку полоски  $1 \times 3$ ; таким образом, мы  $n-1$  раз выбираем один из двух вариантов, и лишь для последнего числа 1 место определяется однозначно.

Н. Васильев, С. Конягин

**M1476.** Докажите, что не существует различных простых чисел  $p, q$  таких, что  $2^p + 1$  делится на  $q$ ,  $2^q + 1$  делится на  $p$ .

Ясно, что  $p$  и  $q$  нечетны, и если одно из них равно 3, то другое тоже должно равняться 3. Поэтому будем в дальнейшем считать, что  $p > q > 3$ .

Первое решение. Из условия следует, что  $2^{2^p} \equiv 1 \pmod{q}$ . С другой стороны, согласно малой теореме Ферма<sup>1</sup>, для простого  $q$  имеем:  $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ .

Пусть  $n$  — наименьшее натуральное число такое, что  $2^n \equiv 1 \pmod{q}$ . Тогда  $n \neq 2$  — отличный от единицы делитель числа  $2^p$ . Значит,  $n = r$  либо  $n = 2r$ , т.е.  $n$  не является делителем числа  $q-1$ . Противоречие.

Второе решение можно получить, опираясь на следующее утверждение.

**Лемма 1.** Пусть  $p, q$  — простые числа,  $q \neq 3$ ,  $2^p + 1$  делится на  $q$ . Тогда  $q = 2kr + 1$ , где  $k$  — натуральное число. Эту лемму легко доказать, заметив, что число  $n$  в первом решении равно  $2r$ . Из нее следует, что  $q > p$ . Противоречие.

Еще одно решение можно получить, опираясь на такое утверждение.

**Лемма 2.** Если числа  $a$  и  $b$  взаимно просты, то  $\text{НОД}(2^a + 1, 2^b + 1) = 1$  либо  $\text{НОД}(2^a + 1, 2^b + 1) = 3$

(причем второй случай имеет место тогда и только тогда, когда  $a$  и  $b$  нечетны).

Третье решение. Имеем:  $2^p + 1$  делится на  $q$ ;  $2^{q-1} - 1$ , по малой теореме Ферма, также делится на  $q$ . Следовательно, и  $2^{p+q-1} + 1$  делится на  $q$  — в противоречии с леммой 2. **Замечание.** Лемма 2 является частным случаем следующего несложного утверждения. Пусть  $\text{НОД}(m, n) = 1$ ,  $\text{НОД}(a, b) = d$ ,  $\text{НОД}(m^a + n^a, m^b + n^b) = d_1$ . Тогда  $d_1 = m^d + n^d$ , если числа  $a/d$  и  $b/d$  оба нечетны;  $d_1 = 1$  либо  $d_1 = 2$  в противном случае (а именно:  $d_1 = 1$ , если  $m$  и  $n$  разной четности;  $d_1 = 2$ , если  $m$  и  $n$  четны).

С. Керопян, В. Сендеров

**M1477.** Существует ли выпуклый а) пятиугольник, б)  $n$ -угольник, от которого прямолинейным разрезом можно отрезать подобный ему?

Ответ: существует.

Пример для  $n = 5$  изображен на рисунке 1, а решение мы приведем сразу для произвольного  $n$ .

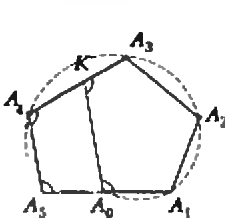


Рис. 1

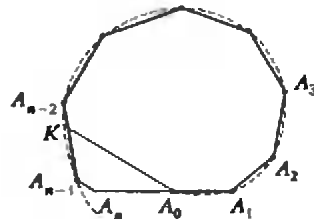


Рис. 2

Рассмотрим «спиральную» ломаную  $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$ , все углы которой равны углу правильного  $n$ -угольника,  $\alpha = \pi(1 - 2/n)$ , а длины звеньев образуют геометрическую прогрессию  $A_0A_1 = 1, A_1A_2 = q, A_2A_3 = q^2, \dots, A_{n-2}A_{n-1} = q^{n-2}$  со знаменателем  $q$ , лишь немного превосходящим 1 — так, что луч, проведенный из  $A_0$  под тем же углом  $\alpha$ , пересекает звено  $A_{n-2}A_{n-1}$  в некоторой точке  $K$  (рис. 2). Пусть  $A_n$  — точка пересечения прямой  $A_0A_1$  с прямой, проведенной через  $A_{n-1}$  параллельно  $KA_0$ ; очевидно, что при преобразовании подобия  $F$  с коэффициентом  $q$ , для которого  $F(A_0) = A_1, F(A_1) = A_2, \dots$ , многоугольник  $A_0A_1 \dots A_{n-2}K$  перейдет в  $A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ . Преобразование  $F$  — поворотная гомотетия с некоторым центром  $O$ , коэффициентом  $q$  и углом поворота  $\varphi = 2\pi/n$ ; пользуясь этим, легко построить нужный  $n$ -угольник: провести на некотором расстоянии  $h$  от точки  $O$  прямую  $l = A_0A_1$ , затем на расстоянии  $qh$  от  $O$  — повернутую на угол  $\varphi$  (относительно  $O$ ) прямую  $F(l) = A_1A_2$ , затем на расстоянии  $q^2h$  от  $O$ , повернув еще на  $\varphi$ , — прямую  $F^2(l) = A_2A_3$ , и т.д.

**Замечания.** 1. Последовательность точек  $A_k = F^k(A_0)$  (при всех целых  $k$ ) лежит на логарифмической спирали, изображенной на рисунке пунктирной линией (ее уравнение в подходящей полярной системе координат  $(r, \varphi)$  имеет вид  $r = Ak^q$ , где  $k = q^{2k/n}$ ).

Из описанного выше построения ясно, что все стороны многоугольников также касаются одной логарифмической спирали (с тем же коэффициентом  $k$  и центром  $O$ ). 2. Можно аналогичным образом построить пример, в котором отрезаемый  $n$ -угольник получается из исходного поворотной гомотетией с углом поворота  $\varphi = \pi t/n$ , где  $t < n$  — произвольное натуральное число, взаимно про-

<sup>1</sup> См., например, статью А. Бюлова и А. Котиковой «Несложные арифметики» в «Кванте» № 3/4 за 1993 год.

стое с  $n$ , и доказать, что этим исчерпывается все разнообразие возможных примеров.

С.Токарев

**M1478.** Существует ли многочлен  $P(x) = x^4 + bx^2 + c$  с положительными коэффициентами такой, что а) уравнение  $P(x) = x^2$  не имеет (вещественных) корней, а уравнение  $P(P(x)) = x^2$  имеет корни; б) наоборот: уравнение  $P(x) = x^2$  имеет корни, а уравнение  $P(P(x)) = x^2$  не имеет корней?

а) Ответ положителен.

Рассмотрим многочлен  $P_0(x) = x^4 + x^2$ . Очевидно, при достаточно малом  $x_0$  имеем  $P_0(P_0(x_0)) < x_0^2$ ; следовательно, это неравенство сохранится при достаточно больших  $n$  и для  $P_n(x_0) = x_0^4 + x_0^2 + \frac{1}{n}$ . Фиксируем число  $n_0$  такое, что  $P_{n_0}(P_{n_0}(x_0)) < x_0^2$ . С другой стороны, для достаточно больших  $x$  будет

$$P_{n_0}(P_{n_0}(x)) > x^2.$$

б) Ответ отрицателен.

Пусть  $P(x_0) = x_0^2$ ; очевидно, можно считать  $0 < x_0 < 1$ . Так как  $x_0^4 < x_0$ , то

$$P(P(x_0)) = P(x_0^2) < P(x_0) = x_0^2.$$

С другой стороны, при достаточно больших  $x$ , очевидно,  $P(P(x)) > x^2$ . Следовательно, уравнение  $P(P(x)) = x^2$  имеет корни.

*Замечание.* Утверждение пункта а) полезно сопоставить со следующим хорошо известным и легко доказываемым предложением. Пусть уравнение  $f(x) = x$ , где  $f(x)$  — заданная на всей числовой оси непрерывная функция, не имеет (вещественных) корней. Тогда уравнение  $f(f(x)) = x$  также не имеет корней.

Для случая  $f(x) = ax^2 + bx + c$  это предложение было одной из задач VII Всесоюзной олимпиады (см. книгу «Международные математические олимпиады» Е.А.Морозовой, И.С.Петракова, В.А.Скворцова. — М.: Просвещение, 1976. — Задача № 266).

В.Сендеров

**M1479.** Число 26 можно тремя способами разложить в сумму четырех натуральных чисел так, что все 12 чисел различны:

$$26 = 1 + 6 + 8 + 11 = 2 + 5 + 9 + 10 = 3 + 4 + 7 + 12.$$

Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $K = K(n)$  наибольшее число четверок натуральных чисел, дающих в сумме  $n$  и состоящих из  $4K$  различных чисел. Докажите, что

$$K(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor,$$

где  $\lfloor x \rfloor$  — целая часть числа  $x$ .

Пусть выбрано  $k$  четверок различных натуральных чисел, в сумме дающих  $n$ . Обозначим через  $s$  сумму всех  $4k$  чисел, входящих в эти четверки. Тогда, с одной стороны,  $s = nk$ , а с другой стороны,

$$s \geq 1 + 2 + \dots + 4k = 2k(4k + 1).$$

Поэтому  $nk \geq 2k(4k + 1)$ , откуда  $k \leq \frac{n-2}{8}$ .

Осталось привести набор  $\left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor$  четверок чисел, удов-

летворяющий условиям задачи. Обозначим число

$\left\lfloor \frac{n-2}{8} \right\rfloor$  через  $a$  и пусть  $n = 8a + 2 + t$ , где  $t = 0, 1, 2, \dots, 7$ .

Рассмотрим следующую таблицу чисел:

1	2	3	...	$a-1$	$a$
$2a$	$2a-1$	$2a-2$	...	$a+2$	$a+1$
$2a+1$	$2a+2$	$2a+3$	...	$3a-1$	$3a$
$4a+t$	$4a+t-1$	$4a+t-2$	...	$3a+t+2$	$3a+t+1$

Числа, стоящие в первом столбце, образуют первую четверку чисел, стоящие во втором — вторую четверку чисел, и так далее.

Л.Курляндчик

**M1480.** Назовем ежом фигуру, составленную из куба и шести приклеенных к нему (в точности по граням) кубов того же размера. Кнопкой назовем фигуру, получающуюся из ежа отбрасыванием одного из кубов (не центрального). Разбейте пространство на а) кнопки, б) ежи. в) 2-ежом назовем состоящую из 13 одинаковых кубов фигуру, полученную проклеиванием к одному (центральному) кубу по 2 куба в каждом из шести направлений. Разбейте пространство на 2-ежи. г) Придумайте еще фигуры из кубов, на которые можно разбить пространство.

Пожалуй, самое трудное в этой задаче — найти удобную математическую форму записи решения. После этого решение укладывается «в одну строчку»: но не так легко понять, что фраза «поместим центры 2-ежей в целочисленные точки  $(x, y, z)$ , для которых  $x + 3y + 4z \equiv 0 \pmod{13}$ » дает решения пункта в).

Поэтому начнем с совсем простой задачи: покроем плоскость «крестами» из пяти квадратиков  $1 \times 1$ . Это сделать легко (см. рис. 1). Покажем, как это решение можно было бы объяснить слепному (или компьютеру).

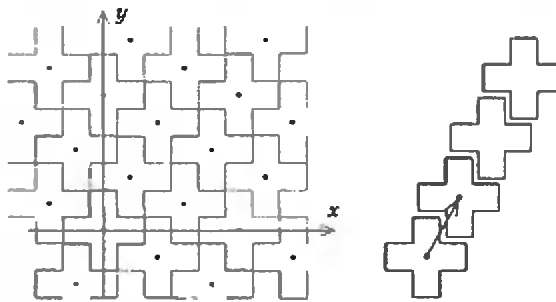


Рис. 1

В системе координат  $Oxy$ , оси которой параллельны сторонам квадратиков, а начало расположено в центре одного из крестов, укажем множество  $M$  центров всех других крестов: это — целочисленные точки  $(x, y)$ , для которых  $x + 2y$  делится на 5, т.е.  $x + 2y \equiv 0 \pmod{5}$ . Каждый крест с центром  $(x, y)$  содержит 5 клеток — с центрами  $(x, y)$ ,  $(x \pm 1, y)$ ,  $(x, y \pm 1)$ .

Доказать, что множество крестов с центрами в  $M$  покрывает в один слой всю плоскость, можно и без рисунка: в следующей табличке указано, к какому кресту относится клетка с центром  $(x, y)$ , если  $x + 2y \equiv r \pmod{5}$ ,  $r = 1, 2, 3$  или 4: чтобы попасть в центр соответствующе-

го креста, нужно

при $r$	1	2	3	4
координате	$x$	$y$	$y$	$x$
добавить	-1	-1	1	1

Легко убедиться, что после этой операции из любой пары  $(x; y)$  получится такая, что  $x + 2y = 0 \pmod{5}$  — центр креста; например, если  $x + 2y = 3 \pmod{5}$ , то  $x + 2(y+1) = x + 2y + 2 = 3 + 2 = 0 \pmod{5}$ . Заметим, что число 5 в нашем решении появилось отнюдь не случайно; это — число клеток в одном кресте.

Оказывается, таким же образом можно описать и нужные нам пространственные примеры: пространство, разбитое на единичные кубики с центрами в целочисленных точках  $(x; y; z)$ , удается заполнить параллельными переносами фигуры из  $m$  кубиков, при которых ее центральный кубик попадает в точки некоторой решетки, задаваемой уравнением вида

$$F(x; y; z) = x + ay + bz = 0 \pmod{m}$$

и для каждого кубика  $(x; y; z)$  с  $x + ay + bz = r \pmod{m}$ , где  $r = 1, 2, \dots, m-1$ , указать, какому именно положению центрального кубика фигуры он относится.

Предлагаем читателям проверить эти примеры и постараться представить их.

а) Кнопка:  $m = 6$ , центральный кубик  $(x; y; z)$  и еще пять:  $(x \pm 1; y; z)$ ,  $(x; y \pm 1; z)$ ,  $(x; y; z \pm 1)$ ;  $F(x; y; z) = x + 2y + 3z$ ;

$r$	1	2	3	4	5
$x$	$y$	$z$	$y$	$x$	
	-1	-1	-1	1	1

б) еж:  $m = 7$ , центральный кубик  $(x; y; z)$  и еще шесть:  $(x \pm 1; y; z)$ ,  $(x; y \pm 1; z)$ ,  $(x; y; z \pm 1)$ ;  $F(x; y; z) = x + 2y + 3z$ ;

$r$	1	2	3	4	5	6
$x$	$y$	$z$	$z$	$y$	$x$	
	-1	-1	-1	1	1	1

в) 2-еж:  $m = 13$ , центральный кубик  $(x; y; z)$  и еще двенадцать:  $(x \pm d; y; z)$ ,  $(x; y \pm d; z)$ ,  $(x; y; z \pm d)$ ,  $d = 1$  и 2;  $F(x; y; z) = x + 3y + 4z$ ;

$r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x$	$x$	$y$	$z$	$z$	$y$	$y$	$z$	$z$	$y$	$x$	$x$	
	-1	-2	-1	-1	2	-2	2	-2	1	1	2	1

Можно придумать и другие заполнения пространства. Например, на рисунках 2–6 показаны фигурки (знак «+» означает, что еще нужно положить кубик сверху, а знак «-» требует еще кубика снизу; для ясности на первых двух рисунках показаны вид спереди (т. е. проекция вдоль оси  $Oy$ ) и сбоку (проекция вдоль  $Ox$ ) этой пространственной фигуры), для покрытия которыми пространства тоже достаточно рассмотреть сравнения.

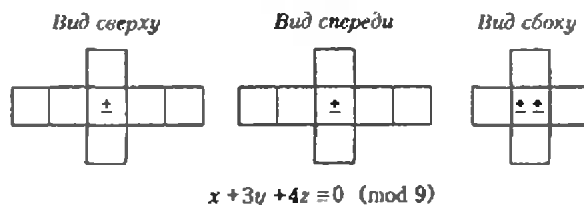


Рис.2

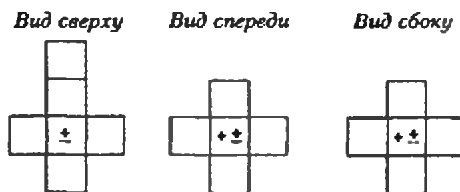


Рис.3

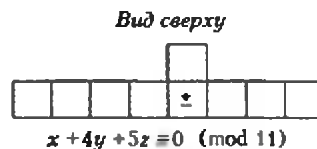


Рис.4

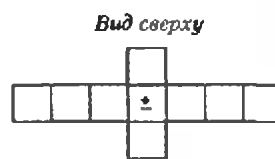
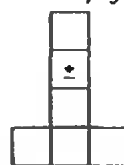


Рис.5

Вид сверху



$$x + 2y + 3z = 0 \pmod{8}$$

Рис.6

Интересно было бы узнать, на какие фигурки из кубиков пространство можно разбить, а на какие нельзя. Например, 3-еж (состоящий, разумеется, из 19 кубиков) кажется очень колючим. Но не каждый сразу строго докажет, что на 3-еж пространство не разбить! Более того, даже на плоскости заполнения и «унаковки» различными фигурками из клеточек могут дать пищу для размышлений. Особенно трудны доказательства невозможности замощения (и получение хороших оценок доли клеток, которые остаются непокрытыми).

В заключение я хочу признаться, что задача возникла при чтении замечательного сборника В.В.Прасолова и И.Ф.Шарыгина «Задачи по стереометрии». В первом параграфе, который называется «Знакомство со стереометрией» и должен воспитать пространственное воображение читателя, есть задача (№12) — разбить пространство на 1-ежи. Решение лаконично (см. рис. 7).

«Можно. Разобьем пространство на слои толщиной 1, а слои разобьем на единичные кубики. В нечетных слоях поместим центры крестов в клетках, отмеченных цифрой 1, а в четных слоях — в клетках, отмеченных цифрой 2.» Однако эта конструкция не дает разбиения на ежи. Она разбивает пространство на кнопки! (В четных слоях по-

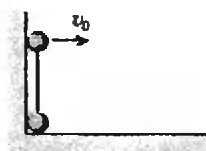
		2		1	
	1		2		1
2			1		2
		2		1	
	1		2		1
2			1		2
		2		1	
	1		2		1



местите, остриями вверх центры кнопок в клетки, помеченные цифрой 2, а в нечетных — остриями вниз в клетки, помеченные цифрой 1). Эта оплошность не случайна. Геометрия иногда для наглядного изображения должна использовать формулы.

А. Спивак

**Ф1488.** В углу комнаты вертикально стоит гантелька, состоящая из двух одинаковых массивных шариков, соединенных легким стержнем длиной  $l = 0,1$  м (см. рисунок). Верхнему шарiku толчком сообщают горизонтальную скорость  $v_0 = 1$  м/с в направлении от стены,



нижний шарик в этот момент неподвижен. Найдите скорость верхнего шарика в момент его удара о пол.

Ускорение верхнего шарика сразу после толчка равно

$$a_n = \frac{v_0^2}{l} = 10 \text{ м/с}^2 > g = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Отсюда сразу следует, что стержень с самого начала движения не сжат, а растянут — а это означает, что нижний шарик не давит на вертикальную стену и по горизонтали гантелька движется свободно.

Перед ударом о пол гантелька горизонтальна — следовательно, скорости шариков в горизонтальном направлении одинаковы и равны

$$v_{n1} = v_{n2} = v_r = \frac{v_0}{2}.$$

Скорость бывшего нижнего шарика все время горизонтальна, а вертикальную составляющую скорости верхнего шарика  $v_n$  найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgl = \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_n^2}{2},$$

откуда

$$v_n^2 = \frac{v_0^2}{2} + 2gl.$$

Окончательно полная скорость верхнего шарика перед ударом о пол составляет

$$v = \sqrt{v_n^2 + v_r^2} = \sqrt{\frac{3}{4}v_0^2 + 2gl} = 1,65 \text{ м/с}.$$

А. Зильберман

**Ф1489.** На гладкой наклонной плоскости удерживают клин массой  $M$  (рис. 1). Верхняя грань клина горизонтальна, и на ней находится кубик массой  $5M$ . Клин отпускают, и он начинает скользить по наклонной плоскости. Каким может быть максимальное ускорение клина?

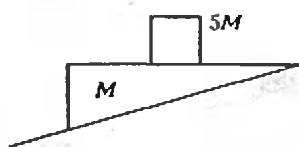


Рис. 1

к\*

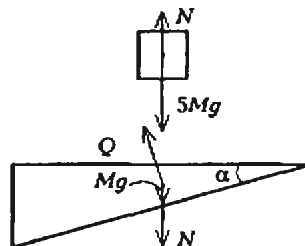


Рис. 2

В условии не задан угол наклона плоскости  $\alpha$  относительно земли — нам придется исследовать зависимость ускорения клина от величины этого угла.

Обозначим ускорение клина вдоль наклонной плоскости через  $a$ , тогда ускорение кубика будет  $a \sin \alpha$  (вдоль вертикальной оси клина и кубик едут вместе). Запишем уравнения движения клина и кубика (рис. 2):

$$(Mg + N) \sin \alpha = Ma, \quad 5Mg - N = 5Ma \sin \alpha.$$

Исключая из этих уравнений силу  $N$ , получим

$$a = g \frac{6 \sin \alpha}{5 \sin^2 \alpha + 1}.$$

Для нахождения максимального значения ускорения можно приравнять к нулю производную правой части по углу  $\alpha$ , но можно обойтись и без этого:

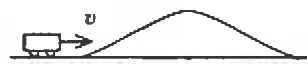
$$a = g \frac{6}{5 \sin \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}} = \frac{6g}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5} \sin \alpha + \frac{1}{\sqrt{5} \sin \alpha}}.$$

Сумма взаимно обратных величин в знаменателе дроби минимальна (а значит, дробь максимальна), когда эти величины равны между собой. Итак, при  $\alpha_0 = \arcsin(1/\sqrt{5})$  ускорение клина максимально и составляет

$$a_{\text{max}} = \frac{3}{\sqrt{5}} g = 1,34g.$$

З. Рафаилов

**Ф1490.** На горизонтальной поверхности стола находится гладкая горка высотой  $H$  и длиной основания  $L$ , которая может свободно скользить по столу (см. рисунок). На эту горку наезжает маленькая тележка,



масса которой в 3 раза меньше массы горки. Скорость тележки  $v$ . На сколько сдвинется горка к тому моменту, когда тележка ее покинет? Время пребывания тележки на горке  $T$ .

Нам придется рассмотреть отдельно два случая: либо при данных в условии значениях скорости тележки и высоты горки тележка через горку переедет, либо нет (съедет обратно).

Найдем такую скорость тележки  $v_0$ , что при  $v < v_0$  она горку не переедет, а при  $v > v_0$  — переедет. Для  $v = v_0$  скорость тележки на вершине горки равна скорости горки  $v_r$ . Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$mv_0 = mv_r + 3mv_r, \quad \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_r^2}{2} + mgH + \frac{3mv_r^2}{2},$$

Окончание на с. 34.

# Магические квадраты

**Д**РЕВНИЕ люди куда больше зависели от природы, чем мы. Не имея метеорологических станций и спутников, центров для обработки наблюдений и прогнозирования, они предсказывали погоду по поведению птиц и животных, форме облаков, цвету восхода и заката Солнца. Найденные приметы передавались из поколения в поколение. Им не пренебрегает и современная служба погоды.

Подобные приметы существовали не только для определения погоды, люди пытались найти связи для всех важных для них явлений с другими явлениями. Так родилась астрология, связывающая судьбы людей и народов с расположением небесных светил. А с появлением чисел им стали придавать и мистический смысл. До сих пор многие считают число 13 несчастливым, а уж если тринадцатое число месяца — пятница, то тут жди беды.

От беды нужно иметь защиту. Так появились разнообразные амулеты, предохраняющие человека от несчастий: драгоценные камни, когти и зубы животных, листья и травы. А в Китае и Индии с давних пор одним из видов амулета была бумажка с девятью цифрами, записанными в некотором порядке (рис. 1). Цифры там были, конечно, не те, которыми мы пользуемся сейчас.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Рис. 1

Главное свойство такого расположения цифр в том, что их сумма в каждом горизонтальном ряду, в каждом вертикальном ряду и по каждой из двух диагоналей одна и та же.

По древней китайской легенде, император Ню, живший 4000 лет назад, однажды нашёл на берегу реки священную черепаха, на панцире которой был изображён рисунок, состоящий из черных и белых кружков, соединённых черточками (рис. 2). Этот рисунок называли «до-шу».

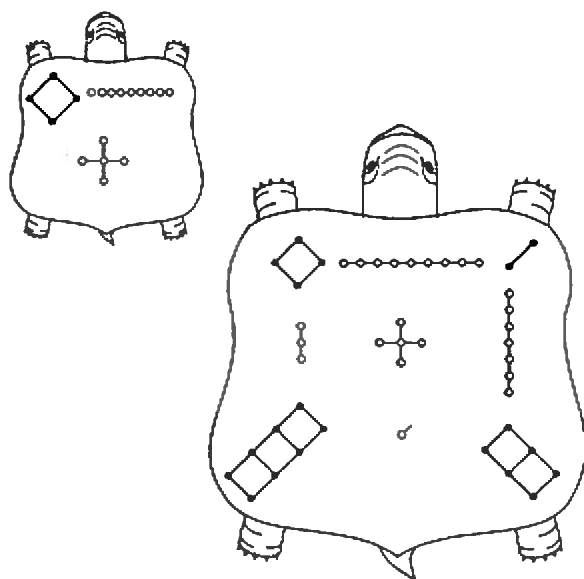


Рис. 2

Подсчитав количество кружков в каждой из фигур, мы получим наш прежний магический квадрат. А существуют ли другие магические квадраты? Давайте подумаем.

Сначала выясним, чему может равняться сумма чисел в строке. Так как  $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ , то в каждой строке (столбце, диагонали) стоит треть от этого числа, т. е. 15.

Теперь определим число, стоящее в центре. Обозначим его через  $x$  и сложим все числа, стоящие на вертикали, горизонтали и диагоналях, проходящих через центр. При этом каждое число войдет в сумму по одному разу, а центральное — четыре раза, поэтому  $4 \cdot 15 = (45 - x) + 4x$ . Отсюда находим, что  $x = 5$ .

Из соображений четности следует, что в углах квадрата должны стоять четные числа, а в серединах сторон — нечетные.

Теперь уже нетрудно убедиться, что все магические квадраты получаются из квадрата «до-шу» с помощью поворотов вокруг центра и симметрий относительно средних линий и диагоналей. Всего же их 8.

По образу квадрата «до-шу» в дальнейшем стали придумывать магиче-

ские квадраты большего размера. На картине знаменитого немецкого художника Альбрехта Дюрера «Меланхолия» мы видим магический квадрат размерами  $4 \times 4$  (рис. 3). Любопытно, что два числа в середине его

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Рис. 3

нижней строки указывают год создания картины (1514 г.).

Магическим квадратом стали называть квадрат  $n \times n$ , в клетках которого записаны числа от 1 до  $n^2$  так, что в каждой строке, каждом столбце и по каждой из двух его диагоналей сумма чисел одна и та же. Найти эту сумму не составляет труда, так как  $1+2+\dots+n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$ . Поэтому сумма в каждой строке (столбце, диагонали) равна  $\frac{n(n^2+1)}{2}$ .

Долгое время составление магических квадратов было весьма популярным занятием математиков и любите-

лей математики. Выдающийся американский общественный деятель, дипломат и ученый Бенджамин Франклин в молодости забавлялся составлением причудливых магических квадратов, скрашивая скучные часы на службе в Законодательном Собрании штата Пенсильвания. Его квадрат  $8 \times 8$ , изображенный на рисунке 4,

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

Рис. 4

обладает многими дополнительными свойствами. Сумма чисел в каждой строке здесь равна  $\frac{8(64+1)}{2} = 260$ . При этом сумма чисел в каждой половине строки и в каждой половине столбца равна 130. Четыре числа в углах вместе с четырьмя числами в центре вновь дают 260. И еще много подобных соотношений можно отыскать в этом квадрате.

Известны и небольшие квадраты с дополнительными свойствами. Так, квадрат  $4 \times 4$ , изображенный на рисунке 5, имеет сумму 34 не только по

1	12	6	15
8	13	3	10
11	2	16	5
14	7	9	4

Рис. 5

строкам, столбцам и диагоналям, но и по «разломанным диагоналям» (рис. 6), а также в каждом квадрате  $2 \times 2$ . Если такими квадратами замостить плоскость, то каждый квадрат  $4 \times 4$  в этой плоскости будет магическим.

Создавались магические квадраты больших размеров. Известный немецкий математик М. Штифель в книге «Arithmetica integra», вышедшей в 1544 году, приводит магический квадрат размерами  $16 \times 16$ . Известны ма-



гические квадраты размерами  $43 \times 43$ . Изготовление большого магического квадрата не составляет труда, поскольку имеются алгоритмы, позволяющие строить магические квадраты любых размеров.

Следует, правда, отметить, что магического квадрата  $2 \times 2$  не существует.

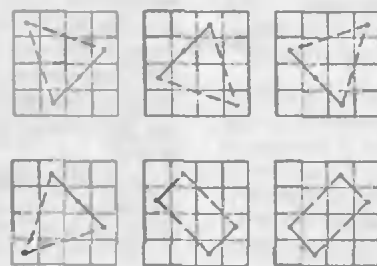


Рис. 6

При всем том, многое о магических квадратах неизвестно. Неизвестно, как зависит количество магических квадратов  $n \times n$  от значения размера  $n$ . Известно лишь, что квадратов  $4 \times 4$  существует 880, а квадратов  $5 \times 5$  — около четверти миллиона. Прямой перебор всех возможностей даже для квадратов  $5 \times 5$  на современных ЭВМ займет около 1000 лет!

Современных математиков магические квадраты интересуют из-за их связи с так называемыми «конечными геометриями», в которых используется конечное число точек, а поэтому «прямые» и «плоскости» в таких геометриях также состоят из конечного числа точек. Подробнее об этом можно прочесть в книге М. М. Постникова «Магические квадраты» (М.: Наука, 1964.).

А. Савин

Начало на с. 24.

откуда

$$v_b = \sqrt{\frac{8}{3} gH}.$$

Если  $v < v_b$ , то получить ответ совсем просто. Смещение центра масс системы по горизонтали за время  $T$  составляет

$$l_{цм} = v_{цм} T = \frac{1}{4} v T.$$

Но тележка покидает горку в том же месте горки, в котором и въезжает на нее. Следовательно, к интересующему нас моменту горка проедет столько же, сколько и центр масс системы:

$$l_{г1} = \frac{1}{4} v T.$$

В том случае, когда  $v > v_b$ , горка сдвинется относительно центра масс системы назад на величину  $Lm/(m+3m) = 1/4 L$ . Тогда полный ее сдвиг будет равен

$$l_{г2} = l_{цм} - \frac{1}{4} L = \frac{1}{4} (vT - L).$$

Ясно, что при заданных размерах горки время  $T$  не может быть выбрано произвольно — оно определяется не только величиной  $v$ , но и зависит от формы горки.

*Р. Александров*

**Ф1491.** В высоком цилиндрическом сосуде с площадью основания  $S = 20 \text{ см}^2$  под легким поршнем находится  $m = 9 \text{ г}$  воды (рис. 1). Воду начинают нагревать с по-

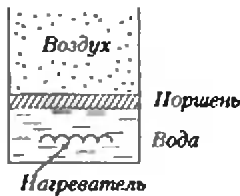


Рис. 1

мощью нагревателя, мощность которого  $P = 100 \text{ Вт}$ . Нарисуйте график зависимости вертикальной координаты поршня от времени и найдите максимальную скорость поршня. Воздуха под поршнем нет, стенки и поршень тепла не проводят. Атмосферное давление  $p_0 = 1 \text{ атм}$ , удельная теплоемкость воды  $c = 4200 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$ , удельная теплота парообразования  $r = 2,26 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}$ .

Пока вода не нагреется до температуры кипения  $t_n = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ , поршень будет неподвижным ( $v_1 = 0$ ). Если начальную температуру считать равной  $t_0 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ , то время нагрева составит

$$\tau_1 = \frac{cm(t_n - t_0)}{P} \approx 30 \text{ с}.$$

При достижении температуры кипения давление насыщенных паров воды станет равным атмосферному, и поршень поедет вверх. Смещение поршня будет определяться количеством испарившейся воды. За время  $\Delta t$  в пар превратится масса воды

$$\Delta m = \frac{P \Delta t}{r}.$$

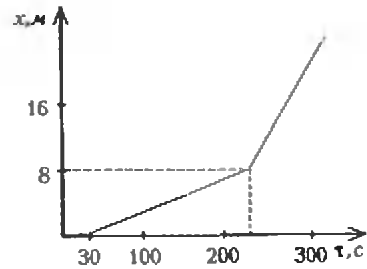


Рис. 2

Эта порция займет объем

$$\Delta V = \frac{\Delta m RT}{M p_0},$$

где  $M = 18 \text{ г/моль}$ ,  $T = 373 \text{ К}$ . Скорость перемещения поршня будет равна

$$v_2 = \frac{\Delta V}{S \Delta t} = \frac{PRT}{rSMp_0} \approx 0,04 \text{ м/с}.$$

Вся вода испарится за время

$$\tau_2 - \tau_1 = \frac{mr}{P} = 2034 \text{ с}.$$

После того как под поршнем окажется только водяной пар (это — трехатомный газ), изменение объема будет связано с увеличением температуры газа при постоянном давлении. Теплоемкость в расчете на моль для трехатомного газа в этом случае равна  $C_p = C_v + R = 4R$ . Тогда

$$\Delta T = \frac{Q}{\nu C_p} = \frac{P \Delta t}{M \cdot 4R}, \quad \Delta V = \frac{m R \Delta T}{M p_0} = \frac{P \Delta t}{4p_0},$$

$$v_3 = \frac{\Delta V}{S \Delta t} = \frac{P}{4Sp_0} = 0,125 \text{ м/с} = 3v_2.$$

График зависимости координаты поршня от времени  $\tau$  приведен на рисунке 2.

*А. Андрианов*

**Ф1492.** Одна из стенок сосуда, содержащего разреженный гелий, устроена не так, как остальные — при ударе о нее молекулы отскакивают с той же энергией, но перпендикулярно стенке. Во сколько раз отличаются концентрации молекул непосредственно около этой стенки и около других?

После удара о «странную» стенку молекулы улетают от нее быстрее, чем от обычной, поэтому концентрация молекул около «странной» стенки должна быть несколько меньше. Оценим эту концентрацию, исходя из того, что сила давления на стенку не должна зависеть от ее устройства (иначе легко было бы нарушить, например, закон сохранения импульса, поставив на тележку сосуд с газом).

Итак, передаваемый обычной стенке при ударе молекулы импульс составляет  $2mv_x$ . При концентрации молекул  $n_0$  давление оказывается равным

$$p = \frac{1}{2} n_0 v_x \cdot 2mv_x = n_0 m v_x^2.$$

Для молекулы, ударившей о «странную» стенку, передаваемый импульс больше — он равен (в среднем)

$mv_x + mv_x \sqrt{3}$ . Число ударов выразим через концентрацию только налетающих молекул  $n_1$  и получим

$$p = n_1 v_x m v_x (1 + \sqrt{3}) = n_1 m v_x^2 (1 + \sqrt{3}).$$

Тогда

$$n_1 m v_x^2 = n_1 m v_x^2 (1 + \sqrt{3}), \quad \frac{2n_1}{p_0} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}.$$

Конечно, это очень упрощенная оценка. Можно предложить и другие, основанные, например, на расчете времени нахождения молекулы возле стенки (сделайте это самостоятельно).

*А. Сашик*

**Ф1493.** В электрическую цепь включена группа приборов, состоящая из трех миллиамперметров и трех одинаковых вольтметров. Показания части приборов приведены на рисунке 1. Найдите остальные показания.

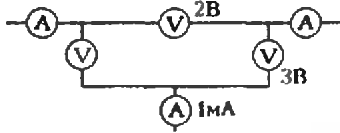


Рис. 1

В условии задачи не сказано, где находятся плюсовые выводы приборов, т. е. нам заданы только отношения токов, но не их направления. Нам придется исследовать два случая. Первый: плюсы вольтметров, показания которых нам известны, соединены вместе; второй: один из вольтметров включен наоборот.

Пусть сопротивление каждого вольтметра  $R$ , тогда токи верхнего и правого составляют соответственно  $2B/R$  и  $3B/R$ . Левый вольтметр должен быть включен плюсом вверх. Он показывает разность напряжений  $1 В$ , значит, его ток равен  $1B/R$ . Теперь нарисуем полное распределение токов, как показано на рисунке 2. Ток нижнего

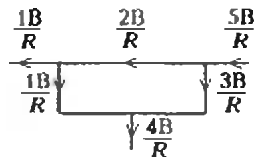


Рис. 2

миллиамперметра нам известен — он равен  $1 мА$ , следовательно,  $4B/R = 10^{-3} А$ . (Отсюда можно найти  $R = 4 кОм$ , но это вовсе не обязательно — показания остальных приборов определятся и без того.) Правый по схеме миллиамперметр покажет  $5B/R = 1,25 мА$ , левый —  $1B/R = 0,25 мА$ .

Пусть теперь один из двух «показывающих» вольтметров включен наоборот, например верхний. Тогда левый вольтметр покажет суммарное напряжение  $5 В$ , а его ток составит  $5B/R$ . Распределение всех токов приведено на рисунке 3. Теперь  $8B/R = 10^{-3} А$  и  $R = 8 кОм$  (но это нам опять не нужно!), правый миллиамперметр показывает  $1/8 мА = 0,125 мА$ , левый —  $7/8 мА = 0,875 мА$ .

*М. Учителев*

**Ф1494.** Вертикально расположенный цилиндрический магнит создает магнитное поле. Величина индукции

поля над магнитом на его оси меняется с высотой в некоторой заданной области по линейному закону  $B(h) = B_0(1 - ah)$ . Точно на оси расположено маленькое тонкое непроводящее колечко диаметров  $d$  и массой  $m$ , по которому равномерно распределен заряд  $Q$ . Плоскость колечка перпендикулярна оси магнита. С какой угловой скоростью нужно закрутить колечко в горизонтальной плоскости вокруг оси, чтобы оно падало с малым ускорением?

Вращающееся заряженное колечко очень похоже на кольцевой ток. Сила со стороны неоднородного магнитного поля в основном растягивает колечко, но есть и вертикальное воздействие, связанное с наличием горизонтальной проекции  $B_r$  вектора магнитной индукции при некотором удалении от оси.

Для нахождения  $B_r$  запишем выражение для магнитного потока, пронизывающего очень тонкий цилиндр высотой  $\Delta h$  и диаметром  $d$ , причем  $\Delta h \ll d$ . Потoki через торцы цилиндра равны соответственно

$$\Phi_1 = B(h) \frac{\pi d^2}{4} = B_0(1 - ah) \frac{\pi d^2}{4},$$

$$\Phi_2 = B(h - \Delta h) \frac{\pi d^2}{4} = B_0(1 - ah + a\Delta h) \frac{\pi d^2}{4},$$

а через боковую поверхность —

$$\Phi_{\text{бок}} = \Phi_2 - \Phi_1 = B_r \pi d \Delta h.$$

Отсюда

$$B_r = B_0 \frac{ad}{4}.$$

Сила, действующая на «точка»  $I = Q\omega/(2\pi)$  по вертикали, равна

$$F_{\text{магн}} = B_r I \pi d = \frac{B_0 a d^2 Q \omega}{8}.$$

Ускорение колечка будет малым, если магнитная сила компенсирует силу тяжести:

$$F_{\text{магн}} = mg.$$

откуда для угловой скорости колечка получаем

$$\omega = \frac{8mg}{B_0 a d^2 Q}.$$

Заметим, что угловая скорость колечка не будет оставаться неизменной — при движении в таком магнитном поле возникает и вихревое электрическое поле, которое будет либо раскручивать, либо тормозить колечко. Этот эффект зависит от величины вертикальной скорости колечка.

*А. Зильберман*

**Ф1495.** Далеко друг от друга находятся два одинаковых сверхпроводящих тонких кольца. Масса каждого кольца  $m = 0,1 кг$ , индуктивность  $L = 0,1 Гн$ . Кольца расположены на общей оси, плоскости их параллельны. По кольцам текут одинаково направленные токи  $I = 1 А$ . В некоторый момент кольца отпускают. Найдите скорости колец перед ударом. Внешние силы на систему не действуют.

Параллельные токи притягиваются — скорости колец при сближении возрастают. Воспользуемся законом со-

хранения энергии: если ничего не излучается, то увеличение кинетической энергии равно уменьшению энергии магнитного поля. (Строго говоря, это не так, но если кольца массивные и их ускорения невелики, то излучением мы можем пренебречь. Кроме того, мы не смогли бы оценить излучение в том случае, когда пренебречь им нельзя. Поэтому будем считать, что мы получим для скоростей оценку сверху.)

Когда кольца далеко друг от друга, суммарная энергия магнитного поля равна  $2LI^2/2 = LI^2$ . Когда кольца подлетят вплотную друг к другу, ток каждого из них станет в 2 раза меньше — полный магнитный поток через каждое кольцо должен остаться неизменным (сверхпроводящие кольца). Это означает, что энергия магнитного поля уменьшится в 2 раза — при тех же потоках токи вдвое меньше. Таким образом,

$$LI^2 - \frac{1}{2}LI^2 = 2\frac{mv^2}{2},$$

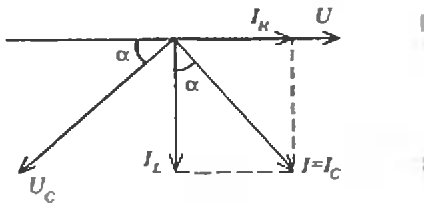
откуда

$$v = \sqrt{\frac{LI^2}{2m}} = 0,71 \text{ м/с.}$$

А. Зильберман

**Ф1496.** В сеть переменного тока (220 В, 50 Гц) включили последовательно соединенные конденсатор емкостью 10 мкФ и нагреватель сопротивлением 1000 Ом. Какую катушку следует подключить параллельно нагревателю, чтобы ток через него был максимальным? Чему равна величина этого тока?

Будем решать эту задачу «задом наперед» — зададим величину напряжения  $U$  на резисторе (нагревателе сопротивлением  $R$ ), вычислим напряжение на  $LCR$ -цепи и найдем условия, при которых оно получится меньше. Ток через резистор равен  $I_R = U/R$  (см. рисунок), ток че-



рез катушку отстает на  $90^\circ$  по фазе, а его величина составляет  $I_C = U/(\omega L)$ . Их суммарный ток  $I$  течет и через конденсатор. Найдем впрям значения косинуса и синуса угла  $\alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{U}{I\omega L}, \quad \sin \alpha = \frac{U}{IR}.$$

Напряжение на конденсаторе равно  $U_C = I/(\omega C)$  и отстает по фазе на  $90^\circ$  от тока  $I$ . Найдем величину суммарного напряжения — на нашей картинке это сумма «векторов»  $U$  и  $U_C$ . Удобно разложить «вектор»  $U_C$  на составляющие вдоль «вектора»  $U$  и перпендикулярно ему:  $U_C \cos \alpha$  и  $U_C \sin \alpha$ . Подставляя значения синуса и косинуса, найдем величину полного напряжения:

$$U_0 = \sqrt{(U_C \cos \alpha - U)^2 + (U_C \sin \alpha)^2} = U \sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2 LC} - 1\right)^2 + \frac{1}{(\omega CR)^2}}.$$

Мы можем выбрать величину  $L$ , стараясь получить  $U_0$  поменьше. Ясно, что минимум будет при  $\omega^2 LC = 1$  (резонанс!), или

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f^2 C} = 1 \text{ Гн.}$$

Такой выбор индуктивности обеспечивает максимальный ток через нагреватель:

$$I_R = \frac{U}{R} = U_0 \omega C = U_0 \cdot 2\pi f C \approx 0,7 \text{ А.}$$

Интересно, что при резонансе ток через резистор не зависит от его сопротивления (объяснение — при увеличении  $R$  возрастает и добротность контура, т.е. увеличивается амплитуда напряжения на резисторе).

З. Рафаилов

**Ф1497.** Два одинаковых радиопередатчика расположены на большой высоте над землей и ретранслируют слабый телевизионный сигнал, передаваемый со спутника. Ветер раскачивает опоры передатчиков так, что амплитуды их качаний существенно превышают длину излучаемой волны. Амплитуды радиосигналов, принимаемых антенной от передатчиков, одинаковы. При одновременной работе передатчиков мощность принимаемого сигнала меняется в очень широких пределах. Объясните явление и оцените суммарный процент времени, в течение которого мощность принимаемого сигнала составляет менее  $1/1000$  от среднего значения принимаемой мощности. Отражением радиосигналов от земли пренебречь.

Мощность принимаемого сигнала меняется в широких пределах из-за интерференции сигналов передатчиков — разность хода меняется при качании опор. Амплитуда суммарного сигнала будет малой, если сигналы почти противофазны. Найдем малый угол  $\varphi$  такой, что в пределах сдвигов фаз от  $(180^\circ - \varphi)$  до  $(180^\circ + \varphi)$  амплитуда будет меньше величины  $U_0 \sqrt{2}/\sqrt{1000}$  (здесь  $U_0 \sqrt{2}$  — амплитуда среднего по мощности сигнала, а отношение  $1 : 1000$  по мощности соответствует отношению  $1 : \sqrt{1000}$  по амплитуде). Для малых углов получим

$$\varphi \approx \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1000}} = \frac{1}{22}.$$

Считая сдвиг фаз между сигналами равномерно распределенным в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ , найдем долю времени малого суммарного сигнала:

$$\frac{\varphi}{\pi} \approx \frac{1/22}{3} \approx 1,5\%.$$

Явление это («замирания» сигнала, «феддинги») широко известно — в диапазоне коротких радиоволн при приеме удаленных радиостанций сигналы меняются в очень больших пределах. При отражении радиоволн от заряженных ионосферных слоев сигналы на приеме суммируются, когда их фазы «плавают» из-за движения «отражателей».

Ясно, что в описанных условиях делать два ретранслятора — это безграмотное техническое решение. Впрочем, второй «ретранслятор» иногда возникает сам по себе — из-за отражения радиоволн.

Р. Александров

## Задачи

1. Столяр Джузеппе получил заказ на изготовление табуреток. «Если я, начиная с сегодняшнего дня, буду делать по 3 штуки, то закончу в воскресенье, а если по 5 штук, то закончу в пятницу,» — размышлял столяр. «А какой день недели сегодня?» — спросило любопытное говорящее полено. В самом деле, какой?

*А. Шевкин*

2. Решите арифметический ребус  $A^B = B^A$  — замените буквы цифрами так, чтобы равенство стало верным. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

*Г. Головатенко*



3. Шли сорок мышей, несли сорок грошей.  
Две мыши поплоше несли по два гроша.  
Немало мышей — вообще без грошей.  
Большие совсем тащили по семь.  
А остальные несли по четыре.  
Сколько мышей шли без грошей?

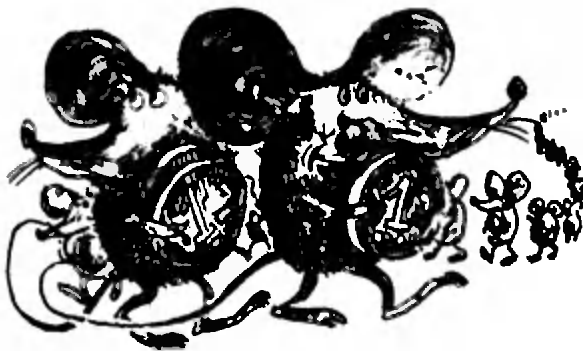
*И. Акулич*

4. Покажите, что число  $1994^2 + 1994^2 \cdot 1995^2 + 1995^2$  является полным квадратом.

*В. Произволов*

5. Может ли предмет, находящийся к северу от наблюдателя, быть южнее его?

*А. Савин*



## «И вспышки молний тьма глотала, И небо долго грохотало...»

С. ТИХОМИРОВА

**Ф**ИЗИКА и поэзия. Кажется, так далеки друг от друга эти области человеческого интеллекта. Однако...

Прочитайте приведенные здесь отрывки из различных стихотворений, взгляните на них с физической точки зрения и попытайтесь ответить на вопросы, сформулированные после каждого отрывка.



1. П. П. Ершов  
«Конек-Горбунок»

Ну-с, так едет наш Иван  
За кольцом на окояи.  
Горбунок летит, как востер.  
И в почин на первый вечер  
Верст сто тысяч отмахал  
И нигде не отдыхал.

Оцените, с какой скоростью скакал Конек-Горбунок и сколько раз «на первый вечер» он мог бы обогнуть земной шар по экватору.

2. Ибн Абд Раббихи  
«Хоть мускус был в мешок упрятан...»

Хоть мускус был в мешок упрятан,  
Распространяет аромат он...



Какое физическое явление описано в этих строках?

3. А. С. Пушкин  
«Борис Годунов»

О д н и  
Все плачут,  
Заплачем, брат, и мы.

Д р у г о й  
Я силюсь, брат,  
Да не могу.

П е р в ы й  
Я также. Нет ли луку?



Для чего персонажам понадобился лук? Почему нарезанный лук пахнет сильнее?

4. Эсхил  
«Орестея»

Смешай в одном сосуде масло  
с уксусом —



Недружные разъединятся  
жидкости.

Как с точки зрения физики объяснить термин «недружные жидкости»?

5. «Панчатантра» (древнеиндийский сборник притч, сказок, басен)

Дорого слово лишь к месту,  
Там, где есть надобность  
в слове.

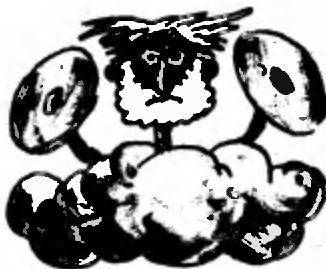
Держится прочно окраска  
Только на чистой основе.



Зачем перед окраской поверхности тщательно очищают?

6. Р. Бернс  
«Тэм О'Шентер»

Дул ветер из последних сил,  
И град хлестал, и ливень лил,

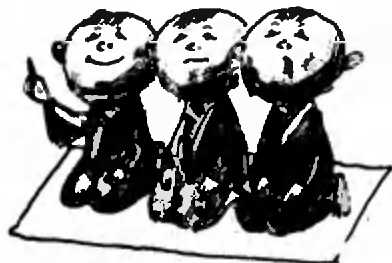


И вспышки молний тьма  
глотала,  
И небо долго грохотало...

Как возникают раскаты грома?

7. Мацуо Басё  
«Собрались ночью, чтоб любоваться снегом»

Скоро ли свежий снег?  
У всех ожиданье на лицах...  
Вдруг зимней молнии блеск!



Почему зимой редко бывают грозы?

8. Ф. И. Тютчев  
«Успокоение»

Гроза прошла — еще курясь, лежал  
Высокий дуб, перунами  
сраженный,  
И сизый дым с ветвей его бежал  
По зелени, грозою освеженной.



Почему дуб чаще других деревьев поражается молнией?

9. И. В. Гёте  
«Фауст»

И м п е р а т о р  
Но странна! Копий остря  
Покрылись белыми огнями.





Над каждым кончиком копья  
Взметнулось маленькое пламя.  
Нечисто это и чудно.

**Фауст**

О государы! Давно-давно,  
Когда бывало море хмуро,  
Ниспосылали Диоскуры  
Такой же свет на корабли  
В залог доплыть до земли.  
Им поклонялись шкипера.  
Они желают нам добра  
И шлют нам это ободренье.

*Какое физическое явление описывается в этом фрагменте?*

**10. Н.С.Гумилев  
«Капитаны»**

Там волны с блесками  
и всплесками  
Непрекращаемого танца,  
И там летит скачками резкими  
Корабль Летучего Голландца.  
Ни риф, ни мель ему  
не встретятся,  
Но, знак печали и несчастий,  
Огни святого Эльма светятся,  
Усеяв борт его и снасти.



*Что такое «огни святого Эльма»?*

**11. Э.Ростан  
«Сирано де Бержерак»**

Я изобрел шесть средств  
Подняться в мир планет!..  
Сесть на железный круг  
И, взяв большой магнит,  
Его забросить вверх высоко,  
Докуда будет вылететь око;  
Он за собой железо привлечет, —  
Вот средство верное!  
А лишь он вас притянет,  
Схватить его и бросить  
вверх опять, —  
Так поднимать он  
бесконечно станет!



*Возможно ли подобное космическое путешествие?*

**12. В.Г.Бенедиктов  
«Недолго»**

Недолго держится роса,  
Блестя слезой на розе алой,  
Но всю бездну небеса  
Отражены тут в капле малой.



*Какие изображения получают в зеркальной капле (в выпуклом сферическом зеркале)?*

**13. Лю Дабай  
«Ты ведь, радуга, кругла...»**

Ты ведь, радуга, кругла.  
Не скрывай свою вторую  
Половину,  
Будь добра!



*Можно ли (и при каких условиях) наблюдать «круглую» радугу?*

**14. Тие  
«Только их крики слышны»**

Только их крики слышны...  
Белые цапли невидимы  
Утром на свежем снегу.



*Многие животные имеют защитную окраску, которая затрудняет их обнаружение. Однако при фотографировании маскировка может утратить свое значение. Почему?*

**15. Еса Бусон  
«Лампу зажгли в потемках...»**

Лампу зажгли в потемках...  
Вдруг потеряли свой цвет  
Желтые хризантемы.



Почему это произошло?

16. А.А.Тарковский  
«Ночной дождь»

И только радуги в тумане  
Вокруг неярких фонарей  
Поведали тебе заране  
О близости любви моей.

Как объяснить описанное физическое явление?

17. А.А.Блок  
«Помнишь ли город  
тревожный...»

Помнишь ли город  
тревожный,



Синюю дымку вдали?  
Этой дорожкой ложной  
Молча с тобою мы шли...

Почему далекие предметы видны в синей дымке?

## ИНФОРМАЦИЯ

### ЗАОЧНАЯ ШКОЛА ПРИ НГУ

При Новосибирском государственном университете работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 9—11 классов общеобразовательных школ любого государства, входившего раньше в состав СССР.

В ЗШ пять отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 9—11 классов, на биологическое — только учащиеся 10 классов, на экономическое — только учащиеся 11 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школах под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ и дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяются в ЗШ, а работы членов кружка проверяет руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 10—11 классов ЗШ (тех, кто будет учиться в этих классах в следующем учебном году) приглашаются в Летнюю школу при НГУ. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо до 30 сентября прислать на имя директора ЗШ заявление, оформленное по приведенному здесь образцу.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ нисымо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, не позднее 15 октября.

Для получения ответа вложите конверт с маркой, с написанным на нем Вашим домашним адресом.

Решения задач запишите в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради напишите те же сведения о себе, что и в заявлении, указав также отделение, тему и номер задания. Работу отошлите вместе с заявлением, причем только простой бандералью (тет-

радь не перегибайте, не сворачивайте в трубочку; тетрадь должна быть тонкой, так как средства на почтовые расходы в ЗШ ограничены). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ). Для поступления в ЗШ достаточно решить две—три задачи. Если какую-то задачу Вы не смогли решить до конца, не расстраивайтесь и напишите нам свои соображения, часть решения или решение в частном случае.

Сообщение о размере оплаты за обучение Вам будет выслано вместе с проверенным первым заданием. Бесплатное обучение в ЗШ сохраняется для детей-сирот, обучающихся в школах-интернатах и детей из многодетных семей (в которых пять и более детей до 18 лет, находящихся на иждивении родителей).

Фамилия, имя,  
отчество (полностью,  
печатными буквами)

Неделин Игорь  
Иванович

Класс, в котором Вы  
учитесь в своей школе

9 "а"

Отделение ЗШ, на  
котором Вы желаете  
учиться (можно указать  
два отделения)

математическое  
(математическое  
и физическое)

Подробный  
домашний адрес с  
обязательным указанием  
индекса  
почтового отделения

632149 Новоси-  
бирская обл.,  
С.Мезениха,  
ул. Андриянова,  
д.28 "а", кв.5

Наш адрес: 630090 г. Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

**Первое задание по физике**

После разбора задач своего класса полезно (и мы Вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, а понравившиеся задачи попробовать решить.

**9 класс**

1. Вес тела в воде  $P_0$  в полтора раза меньше, чем в воздухе. Определите вес тела в жидкости, плотность которой в два раза превышает плотность воды.

2. В результате растяжения проводящего стержня его электрическое сопротивление увеличилось в 9 раз. Во сколько раз при этом увеличилась его длина?

3. Какая часть спирали плитки вышла из строя в результате замыкания, если время закипания воды в чайнике уменьшилось в полтора раза? Считать, что удельное сопротивление материала спирали неизменно.

4. В термосе находится 1 литр воды при температуре 20 °С. Какое минимальное количество льда, имеющего температуру 0 °С, необходимо добавить в термос, чтобы охладить воду до 10 °С? (Недостающие данные возьмите в учебнике или в справочнике.)

**10 класс**

1. Ракета массой  $M$  движется у поверхности Луны с постоянным ускорением  $a$  под углом 30° к горизонту. Найдите силу тяги, если на Луне ускорение свободного падения равно  $g/6$ .

2. Решите задачу 1 для 9 класса.

3. Космический корабль поднимается вертикально вверх с ускорением  $a$ . На высоте  $H$  отделяется первая ступень. Через какое время она упадет на Землю? Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

4. Невесомая вертушка правильной треугольной формы, на концах которой закреплены шарики массой  $m$ ,  $2m$  и  $3m$ , может свободно вращаться вокруг своей оси (рис. 1). Под каким углом  $\alpha$  к вертикали будет находиться шарик массой  $3m$  в положении равновесия?

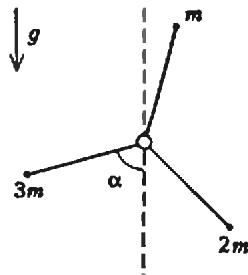


Рис. 1

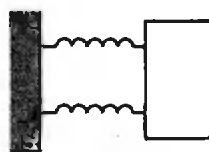


Рис. 2

5. Груз колеблется на двух одинаковых параллельных пружинках (рис. 2). При этом его максимальное ускорение равно  $A$ . В некоторый момент, когда скорость груза максимальна, одну из пружинок убирают. Каким будет максимальное ускорение груза при колебаниях на оставшейся пружинке? Сила тяжести отсутствует.

**11 класс**

1. Решите задачу 2 для 9 класса.  
2. Через пост ГАИ непрерывно со скоростью  $v_1$  движется автомашина. В единицу времени проходит  $V$  автомашин. Затем они разгоняются с постоянным ускорением  $a$  до скорости  $v_2$ . Сколько автомашин находится одновременно на участке разгона?

3. Решите задачу 1 для 10 класса.  
4. Горячий стакан поставили вверх дном на поднос с тонким слоем воды. После остывания до температуры 15 °С стакан оказался заполненным водой на 1/10 своего объема. Найдите начальную температуру воздуха.

5. Заполненный жидким диэлектриком конденсатор имеет емкость  $C$ . Он подключен к батарейке с ЭДС  $U$ . Какой заряд пройдет через батарейку к тому моменту, когда диэлектрик полностью вытечет? Диэлектрическая проницаемость жидкости  $\epsilon$ .

6. Груз колеблется на двух одинаковых параллельных пружинках (см. рис. 2). При этом его максимальное ускорение равно  $A$ . В некоторый момент, когда ускорение груза равно  $a$ , одну из пружинок убирают. Каким будет максимальное ускорение груза при колебаниях на оставшейся пружинке? Сила тяжести отсутствует.

**Первое задание по математике**

**9 класс**

1. Восстановите цифры, обозначенные звездочками, в числе  $25*4*$ , чтобы получилось число, делящееся на 72.

2. Некоторое четное число является суммой двух квадратов целых чисел. Докажите, что и его половина является суммой двух квадратов целых чисел.

3. Внутри квадрата проведены два взаимно перпендикулярных отрезка, соединяющих точки, взятые на противоположных сторонах квадрата. Докажите, что эти отрезки равны.

4. Сколько раз в течение суток стрелки часов образуют развернутый угол?

5. Существует ли треугольник, у которого все высоты меньше 1 см, а площадь больше 100 см<sup>2</sup>?

6. Докажите, что среди 11 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 10.

**10 класс**

1. Докажите, что число  $n^5 - n$  делится на 10 при любом натуральном  $n$ .

2. Сколько раз в течение суток стрелки часов образуют прямой угол?

3. Найдите многочлен с целыми коэффициентами, среди корней которого есть число  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ .

4. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ xy - z^2 = 1 \end{cases}$$

5. Даны отрезок и параллельная ему прямая. Пользуясь только линейкой (односторонней), разделите отрезок пополам.

6. В квадрате со стороной 6 произвольным образом отмечено 7 точек. Докажите, что какие-то две из них находятся на расстоянии, не превосходящем  $\sqrt{13}$ .

**11 класс**

1. Докажите, что числа вида 16, 1156, 111556, 11115556 и т. д. являются квадратами целых чисел.

2. Докажите, что для всех  $x$  выполнено неравенство

$$3(1 + x^2 + x^4) \geq (1 + x + x^2)^2.$$

3. Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$ . Известно, что площадь треугольника  $ABE$  равна  $S_1$ , площадь треугольника  $CDE$  равна  $S_2$ ,  $S_1 \neq S_2$ . Найдите площадь  $S$  трапеции.

4. Дан острый угол и точка  $A$  внутри него. Постройте треугольник  $ABC$  наименьшего периметра, вершины  $B$  и  $C$  которого лежат на сторонах угла.

5. Докажите, что если углы треугольника  $ABC$  удовлетворяют равенству

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1,$$

то треугольник прямоугольный.

6. По дорожке, имеющей форму окружности, из двух диаметрально противоположных точек  $A$  и  $B$  выбегают одновременно два спортсмена и бегут с постоянными скоростями навстречу друг другу. Первая их встреча произошла через  $t$  секунд в  $a$  метрах от  $B$ , вторая — в  $2a$  метрах от  $A$  ( $a > 0$ , под расстоянием понимается длина кратчайшего пути по дорожке). Найдите скорость спортсменов.

## НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ШКОЛЬНИКОВ В ЭНЕРГОФИЗИЧЕСКОМ ЛИЦЕЕ

Для исследователя, будь то маститый ученый или только начинающий свой путь в науку школьник, очень важно иметь возможность делиться своими результатами с коллегами и узнавать об их работе в непосредственном общении с ними. Поэтому научные конференции школьников всегда привлекают большое число участников. Не стала исключением и ставшая традиционной, уже четвертая по счету, конференция по физике, математике и информатике, проводимая Энергофизическим лицеем 1502 при МЭИ. В этом году она состоялась в конце зимних каникул, с 9 по 12 января, и собрала 34 команды, прибывшие из таких далеких от Москвы городов, как Нижний Тагил и Черновцы, Норильск и Нальчик, Петрозаводск и Запорожье и многих других. Общее число участников превысило две сотни, и большинство из них — более 140 — выступили с докладами.

Доклады по математике, а их было около 50, были разбиты на две секции по темам: в одной были представлены алгебра и анализ, в другой — геометрия и дискретная математика. Как и в прошлые годы, особо отличилась команда Аничкова лицея из Санкт-Петербурга, представители которой получили один (из двух присужденных) диплом первой и три (из пяти) диплома второй степени. Однако на этот раз и другие команды привезли достаточно много не менее достойных докладов. Благодаря этому, уровень конференции в целом повысился. Правда, работ, посвященных совсем новым (хотя бы для жюри) задачам было сравнительно немного. Однако и число открыто несамостоятельных выступлений в пересказом глав учебников или популярных книг было невелико. О хорошем качестве большинства докладов говорит то, что жюри, оценивавшее их достаточно строго, наградило различными дипломами и призами 31 доклад.

Чтобы дать читателям представление о разнообразии докладов, представленных на конференции, кратко расскажем о некоторых докладах-призерах.

Один из трех дипломов III степени достался Дмитрию Михалину и Игорю Никонову (школа 345, Москва), которые нашли оригинальный подход к решению одной из самых трудных задач из старинной серии о фальшивых монетах — о кратчайшем способе выделения из группы одинаковых монет одной, отличающейся от них по весу (неизвестно, в какую сторону). Андрей Грабежной (СУИЦ МГУ; диплом II степени) исследовал механическую задачу о рав-

новесии плавающего треугольника, применив интересные дифференциально-геометрические соображения. А Юрий Махарьчев (школа 57, Москва; диплом II степени) придумал новое, более простое доказательство весьма непростой классической теоремы Куратовского об условиях, при которых граф можно уложить на плоскость без самопересечений. Дипломы I степени были присуждены двум докладам. Виктор Баргачев (Аничков лицей) исследовал число различных множеств, которые можно получить из данного множества, применяя к нему в различном порядке и количестве операции замыкания (присоединения границы) и взятия внутренней (отбрасывания границы). Ответ получается неожиданный (хотя и известный специалистам по общей топологии) — семь! Если к этим двум операциям присоединить еще и взятие выпуклой оболочки, то, как показал Виктор, результат удваивается. Но, пожалуй, наивысшую оценку жюри заслужил доклад Владлена Гюморина (Химический лицей 1303, Москва) «Построение непрерывной числовой системы на основе гессенберговских операций над ординалами». К сожалению, в этом случае нам придется ограничиться только названием доклада: в двух словах невозможно пояснить даже сами основные понятия, с которыми работал Владлен. (Впрочем, с этой и другими работами можно будет подробнее познакомиться по сборнику тезисов докладов, который издается по итогам конференции в Энергофизическом лицее.) Отметим лишь, что это исследование отличалось не только самостоятельностью в постановке и решении задачи, высоким уровнем используемого математического аппарата, но и тем, как хорошо о нем было рассказано — в отличие, увы, от большинства других, в том числе и призеров.

Докладов по физике было 56, и они почти поровну разделились между теоретической и экспериментальной секциями. И здесь жюри отметило повысившееся в целом качество работ. Еще не вполне, но почти исчезли чисто реферативные работы, свидетельствующие лишь об ораторском искусстве докладчика, обычно слабо разбирающегося в сути описываемых сложных явлений. Стало значительно меньше и работ, выполненных в научно-исследовательских лабораториях на сложной технике, в которых роль докладчиков чаще всего сводится к роли лаборанта, мало знакомого даже с принципом работы используемой аппаратуры. Наоборот, истинно

творческих, граничащих с серьезными исследованиями, работ стало больше.

К ним, конечно, относятся оба доклада, оцененных дипломами первой степени. Представитель «хозяев» конференции Андрей Русанов получил в эксперименте значительное расхождение реально наблюдаемой при низких давлениях скорости испарения льда от той, которую дает обычно рассматриваемая модель, предполагающая неупругий характер взаимодействия молекул пара с поверхностью льда. В его докладе предложена модель, объясняющая эти результаты. Владимир Бродский (СУИЦ МГУ) теоретически исследовал влияние приграничного слоя на характеристиках света, отражаемого от границы изотропной линейной среды при различных углах падения. Полученные результаты хорошо описывают известные в литературе отклонения от формулы Френеля при падении света под углом Брюстера.

Отметим успех еще двух представителей СУИЦ МГУ, награжденных дипломами II степени. В число призеров вошли также учащиеся гимназии 91 Москвы, лицея 566 Санкт-Петербурга, киевского физико-математического лицея 1, лицея 18 подмосковного Калининграда. Кроме того, поощрительные дипломы завоевал ребята из Запорожья, Арзамаса-16, Норильска и др.

Оба диплома I степени по информатике были присуждены представителям самого Энергофизического лицея — Дмитрию Шорину и Денису Небольскому. Каждый из них представил по две программы, проявив глубокие знания программных средств, методов системного программирования. Другими призерами, как и в других секциях, также стали, в основном, школьники из двух столиц, что, конечно, неудивительно. Тем более приятно, что один из дипломов второй степени поехал в Пермь, а третьей — в Петрозаводск.

По установившейся традиции, в программу конференции были включены «научно-спортивная» часть («математическая регата» — устная командная близкородственная и физбой) и «научно-развлекательная» часть (экскурсия в Политехнический музей с физическим шоу). Гости конференции посетили цирк и Оружейную палату в Кремле.

Привычно хорошей организации конференции в этом году способствовало и повышение ее официального статуса: она была учреждена Московским департаментом образования, Московским энергофизическим институтом, лицеем 1502 при МЭИ, Специализированным

учебно-научным центром МГУ, журналами «Квант» и «Информатика и образование». Состав учредителей позволил сформировать профессиональное жюри и провести конференцию на высшем научном уровне.

На встрече организаторов конференции, членов жюри и заинтересованных

руководителей делегаций было принято важное решение о консолидации порой разрозненных усилий по проведению аналогичных конференций в будущем и организации Международной научной конференции школьников, поддерживаемой государственными образовательными структурами. Был сформирован оргкомитет ближайшей Международной конференции, которую намечено провести в Черновцах. (Пока верстался этот номер журнала конференция прошла.)

*В. Дубровский, В. Лобышев*

## ЗАОЧНАЯ ШКОЛА ПРИ ВКИ НГУ

Заочная школа Высшего колледжа информатики Новосибирского государственного университета (ВКИ НГУ) работает в рамках программы «Молодые информатики Сибири». В настоящее время обучение в заочной школе проводится по курсам:

- разработка первых программ с использованием «Turbo Pascal 6.0»,
- введение в компьютерное моделирование физических процессов и явлений,
- математика (расширенный школьный курс 8 — 10 классов с элементами математической логики и информатики),
- механика и электричество (расширенный школьный курс 8 — 10 классов),

— введение в экономику (основные понятия в микро- и макроэкономике).

Школа работает круглогодично. Каждый учащийся сам выбирает удобный ему темп обучения. Учебные материалы рассылаются выпусками, состоящими из нескольких заданий.

Организация обучения в школе (подготовка и размножение выпусков, проверка работ и т.п.) требует больших финансовых расходов. Учащиеся оплачивают только половину стоимости обучения, остальные расходы берет на себя Высший колледж (подробнее о размере платы за обучение Вам будет сообщено после зачисления в школу). Уменьшить стоимость обучения можно путем созда-

ния групп, обучающихся по форме «Коллективный ученик».

Учащиеся Заочной школы, успешно выполнившие все задания, получают удостоверение об окончании.

Для зачисления в Заочную школу пришлите:

- заявление с указанием, по какому курсу Вы желаете пройти обучение,
  - пустой конверт с маркой и Вашим обратным адресом.
- Наш адрес: 630058 г. Новосибирск-58, ул. Русская, 35, ВКИ НГУ, Заочная школа.*
- Телефон для справок: (383-2)-33-19-33, E-mail: prog@vki.nsk.su*

## ПЯТЫЕ САХАРОВСКИЕ ЧТЕНИЯ В САНКТ-ПЕТЕРБУРГЕ

19-20 мая 1995 года в Санкт-Петербургском лицее «Физико-техническая школа» состоялась Пятые Сахаровские чтения — научная международная конференция школьников. По традиции работа конференции началась в стенах старейшего физического института страны — Физико-технического института им. А.Ф. Иоффе.

Ученые-физики, соратники А.Д. Сахарова, рассказали школьникам из США, России, Югославии и Украины о великом гражданине и ученом.

В течение двух дней на заседаниях секций (физики, математики, программирования, истории, литературоведения, биологии и химии) были заслушаны доклады более 150 учащихся из 20 городов.

Жюри, в состав которого входили ученые из ФТИ, Московского и Санкт-

Петербургского университетов, Института физиологии им. Сеченова, Института русской литературы и Института русской истории РАН, члены редколлегии журнала «Квант», отметили высокий уровень многих докладов школьников. Наиболее высоко были оценены доклады по истории З. Барзаха из Санкт-Петербургского лицея ФТШ; по литературе Е. Горюнского из СУНЦ МГУ и А. Когана из Академической гимназии (Санкт-Петербург); по математике А. Басова из Анничкова Лицея (Санкт-Петербург) и М. Гавриловича из лицея №239 (Санкт-Петербург).

Жюри секции биологии отметило работу большого коллектива учащихся московской школы №520.

По традиции конференция завершилась обсуждением проблем воспитания

исследователя в школе, в нем приняли заинтересованное участие ученые, учителя из различных городов нашей страны и из-за рубежа.

Разумеется, огромное впечатление на учащихся произвела культурная программа, позволявшая им познакомиться с одним из самых замечательных городов мира — Санкт-Петербургом.

Следующие Сахаровские чтения состоятся 21 мая 1996 года.

Заявки об участии в конференции Вы можете прислать по адресу:

*194021 Санкт-Петербург, ул. Хлопина 5, «Физико-техническая школа».*

*Телефон для справок: (812) 247-15-15, 247-93-74.*

*Я. Бирман*

НОМЕР ПОДГОТОВЛЕН ПРИ ПОДДЕРЖКЕ  
РОССИЙСКОГО ФОНДА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

# Геометрическое место точек

А. САВИН

**Г**ЕОМЕТРИЧЕСКИМ местом точек, обладающих каким-либо заданным свойством (сокращенно — ГМТ), называется множество всех таких точек. Это название восходит к древнегреческому математикам, считавшим, что линии не состоят из точек, а являются тем местом, где точки располагаются. Объясняли они это так: точка не имеет толщины, поэтому сколько ни прикладывая точку к точке, в результате получишь лишь одну точку.

Мой интерес к ГМТ возник еще в школе. Мне очень нравилось решать задачи «на построение», которые сейчас практически отсутствуют в школьных программах. В них бываю заданы несколько элементов фигуры: углы, некоторые длины, — и требуется восстановить фигуру по этим данным. Существует несколько различных методов их решения. Один из них — «метод геометрических мест». Он состоит в том, что отбрасывается одно из данных, при этом фигура уже определяется неоднозначно. Рассматривается геометрическое место, в котором может находиться одна из характерных точек фигуры: вершина, центр и т.д. Затем отбрасывается другое из данных задачи (а первое вновь учитывается). Тогда выбранная характеристическая точка будет принадлежать уже другому ГМТ. А теперь рассмотрим точки, принадлежащие обоим ГМТ, они и будут возможными положениями выбранной точки. Дальнейшее построение, как правило, уже не составляет труда.

Разберем простенькую задачу такого рода: построить треугольник, если заданы его основание  $AB$ , высота и медиана, проведенные из точки  $C$ .

Построим основание  $AB$ , отметим точку  $K$  — его середину. Если отбросить то, что задана высота треугольника, тогда точка  $C$  будет лежать на окружности с центром в точке  $K$  и радиусом, равным данной медиане. Если же, наоборот, отбросить то, что известна медиана, то точка  $C$  будет лежать на двух прямых, параллельных отрезку  $AB$  и отстоящих от него на расстояние, равное заданной высоте треугольника. Если величина заданной медианы больше заданной высоты, то получаем четыре точки пересечения (рис. 1); если эти величины равны, то получаем две точки (касания); и в случае, если заданная длина высоты больше заданной длины медианы, решение нет.

Разумеется, при решении более трудных задач приходится пользоваться геометрическими местами точек, возникающими при более сложных предположениях. Поэтому полезно познакомиться с наиболее часто встречающимися ГМТ. Не сомневаюсь, что многим читателям они известны. Все они — ГМТ вершины  $C$  треугольника  $ABC$  с заданным основанием  $AB$  и свойством  $Q$ , одним из перечисленных ниже:

1. Если задан угол  $\alpha$  при вершине  $C$ , то точка  $C$  принадлежит кривой, состоящей из двух дуг окружностей (рис. 2).

2. Если задано отношение  $k$  боковых сторон  $AC:CB$ , то вершина  $C$  лежит на окружности с диаметром, принадлежащем прямой  $AB$  (рис. 3).

3. Если задана разность квадратов боковых сторон, то точка  $C$  лежит на прямой, перпендикулярной прямой  $AB$  (рис. 4).

4. Если задана сумма квадратов боковых сторон, то точка  $C$  лежит на окружности с центром в середине отрезка  $AB$  (рис. 5).

Попробуйте самостоятельно доказать эти утверждения.

Неискушенный читатель спросит: «А почему не указаны ГМТ для случаев, если заданы сумма, разность или произведение боковых сторон?» Да потому, что соответствующие кривые не изучаются в средней школе. В первом случае это эллипс (рис. 6), во втором — гиперболоа (рис. 7) (эти кривые подробно изучаются в вузовском курсе математики), а в третьем случае получают кривые, называемые «олами Кассини». На рисунке 8 изображены овалы произведения расстояний. Если величина произведения меньше квадрата половины длины отрезка  $AB$ , то кривая

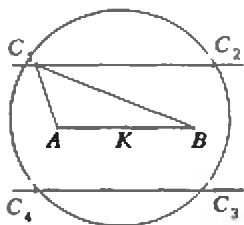


Рис. 1

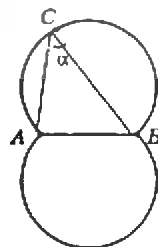


Рис. 2

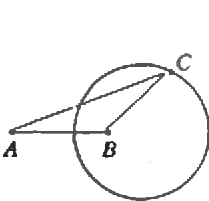


Рис. 3

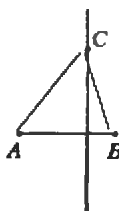


Рис. 4

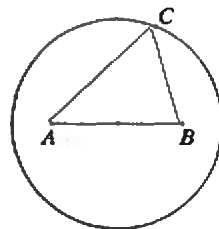


Рис. 5

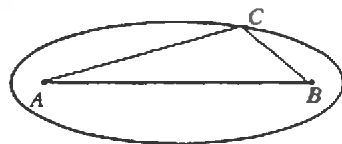


Рис. 6

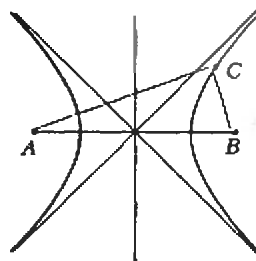


Рис. 7

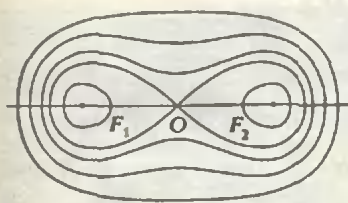


Рис. 8

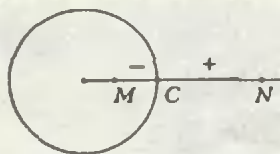


Рис. 9

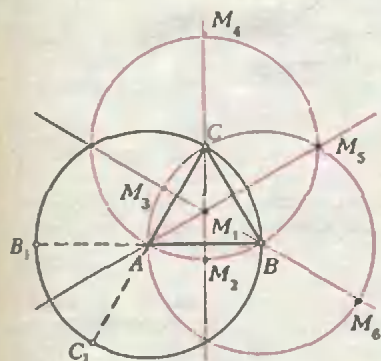


Рис. 10

состоит из двух овалов, при равенстве они соприкасаются, образуя «восьмерку». Эта кривая называется «лемнискатою Бернулли». Слово «лемниската» означает бантик, которым связывали лавровые венки для героев.

Теперь самое время предложить читателям серию задач на построение, в которых используются рассмотренные ГМТ, но я удержусь от того, чтобы пойти по этой проторенной дорожке, а предложу вам провести самостоятельно довольно значительное исследование, которое, как мне кажется, должно доставить удовольствие.

Начнем с того, что точка — это окружность нулевого радиуса, а прямая — это окружность бесконечного радиуса. С точки зрения геометрии у них действительно много общих свойств, поэтому естественно рассмотреть перечисленные ГМТ, заменяя одну из точек  $A$  и  $B$  или сразу обе на окружность или прямую. Исследование обещает быть довольно объемным. Постараемся очертить его рамки.

Рассмотрим 6 ГМТ, для которых 1) сумма, 2) разность, 3) отношение, 4) произведение, 5) сумма квадратов, 6) разность квадратов расстояний до двух окружностей есть величина постоянная. При этом одна или обе окружности могут быть прямыми или точками. Получаем еще 6 возможностей. Всего  $6 \times 6 = 36$  возможностей.

Правда, чтобы рассмотреть их все, вам потребуется знание свойств эллипса, гиперболы и параболы. Их можно найти

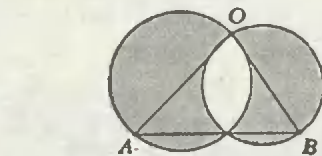


Рис. 11



Рис. 12

в любом учебнике по аналитической геометрии.

Хотелось бы отметить одну деталь, которая может быть упущена при самостоятельной работе. Расстояние от точки  $A$  до окружности с центром в точке  $O$  — это длина отрезка луча  $OA$  от точки  $A$  до точки пересечения этого луча с окружностью. Однако часто бывает удобным считать это расстояние положительным, если точка  $A$  находится вне круга, и отрицательным, если точка  $A$  находится внутри круга (рис. 9). Аналогично, удобно считать расстояние до прямой положительным для точек одной из двух полуплоскостей, на которые разбивает плоскость эта прямая, и отрицательным для другой. Использование двух типов расстояний облегчит вам исследование, но сделает его почти вдвое более объемным.

На этом я оставляю читателя один на один с проблемой, а сам перехожу к дальнейшим воспоминаниям, связанным с ГМТ.

Задачи на ГМТ были очень популярны на московских и ленинградских математических олимпиадах 50-х годов. Правда, среди предлагавшихся решений встречались и такие: «В школе мы проходили только прямую и окружность, следовательно, это ГМТ является прямой или окружностью». После этого брались три точки этого ГМТ — если они оказывались на одной прямой, то утверждалось, что эта прямая и есть искомое ГМТ, а если нет, то через эти три точки проводилась окружность. Как

ни страшно, но этот способ действительно указывал требуемое ГМТ. Чтобы наказать любителей таких решений, я придумал в то время несколько задач, для которых этот метод не подходил. Вот одна из них.

На плоскости дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Найдите множество точек  $M$  таких, что треугольники  $ABM$  и  $ACM$  оба равнобедренные.

Ответ изображен на рисунке 10. Это окружность, с центром в точке  $A$  и радиусом  $AB$ , без четырех точек, и еще шесть точек:  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$  и  $M_6$ . Эта задача побывала во многих сборниках олимпиадных задач.

Среди олимпиадных задач на ГМТ меня в свое время особенно поразила следующая.

На плоскости заданы точка  $O$  и отрезок  $AB$ . Через  $O$  проводятся всевозможные прямые. Надо найти множество точек, являющихся проекциями точек отрезка  $AB$  на эти прямые.

Ответ довольно неожиданный. Построим два круга с диаметрами  $OA$  и  $OB$  (рис. 11), тогда искомое ГМТ — это множество точек, принадлежащих ровно одному из этих кругов, включая и обе окружности. Эдакое «толстое» ГМТ.

Мне захотелось тоже придумать «толстое» ГМТ, что и было сделано.

По полю проходит прямая дорожка. Человек находится на дороге в точке  $A$ . Он может идти по дороге со скоростью не больше  $6$  км/ч, а по полю — не быстрее  $3$  км/ч. Укажите точки, в которых он может оказаться через час.

Ответ изображен на рисунке 12. Это — фигура, ограниченная дугами окружности с центром в точке  $A$  и радиусом  $3$ , а также касательными к этой окружности из точек  $B$  и  $C$  на заданной прямой, отстоящих от точки  $A$  на расстоянии  $6$ . Эта задача также побывала во многих сборниках задач.

В качестве упражнений еще три любопытных ГМТ.

1. Из точки квадратного бильярда пускается шарик параллельно одной из его диагоналей. Найдите ГМТ точек  $M$  на бильярде таких, что шарик, пущенный из  $M$  одновременно с первым шариком со скоростью, равной (по величине и направлению) скорости первого шарика, столкнется с ним.

2. На плоскости даны три точки  $K, L$  и  $N$ . Про четырехугольник известно, что он выпуклый и что середины некоторых трех его сторон лежат в данных точках  $K, L$  и  $N$ . Найдите ГМТ точек, в которые может попасть

- середины четвертой стороны,
- вершина этого четырехугольника.

3.  $A$  и  $B$  — различные фиксированные точки окружности,  $K$  — переменная точка той же окружности. На каждой дуге  $AKB$  отметим середину  $M$ . Найдите ГМТ точек  $M$ . (Если, например,  $AK < KB$ , то  $M$  — такая точка отрезка  $AK$ , что  $AM = MK + KB$ .)

# Замерзающая лужа

А. МИРАНСКИЙ, А. ШАПИРО

Поздней осенью по утрам часто можно видеть лужи, покрытые прозрачной корочкой льда. А задумывались ли вы над тем, что же происходит в луже при ее замерзании? Давайте немного поговорим об этом.

Понятно, что понижение температуры воздуха первыми «замечают» верхние слои воды. По мере охлаждения они становятся плотнее и опускаются вниз. Их место занимает более теплая вода. Но такое перемешивание происходит только до тех пор, пока температура воды не повысится до +4 °С. Как известно, плотность воды при этой температуре и нормальном давлении максимальна и принята равной единице (см. таблицу). При

T, °C	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>	T, °C	$\rho$ , г/см <sup>3</sup>
0	0,999867	10	0,999727
1	0,999926	30	0,999672
2	0,999968	50	0,998960
3	0,999992	70	0,977808
4	1,000000	90	0,965343
5	0,999992	100	0,958375

дальнейшем понижении температуры верхние слои воды уже не могут сжиматься, и, постепенно охлаждаясь до нуля градусов, вода начинает замерзать. Такое поведение воды связано со своеобразием ее внутреннего устройства.

Молекула воды, состоящая из двух атомов водорода и одного атома кислорода, нелинейна, ее кристаллографическая модель выглядит примерно так, как показано на рисунке 1. (Современная физика методами оптической спектроскопии и рентгеноструктурного анализа позволяет точно определять углы и длины связей в молекулах.) Вследствие того, что электронные облака атомов водорода в молекуле воды электростатически оттянуты к атому кислорода, молекула обладает электрической асимметрией и характеризуется определенным дипольным моментом (величиной, отвечающей за электрические свойства системы заряженных частиц). Именно наличие дипольного момента является причиной возникновения упорядоченной структуры в чистой жидкой воде —

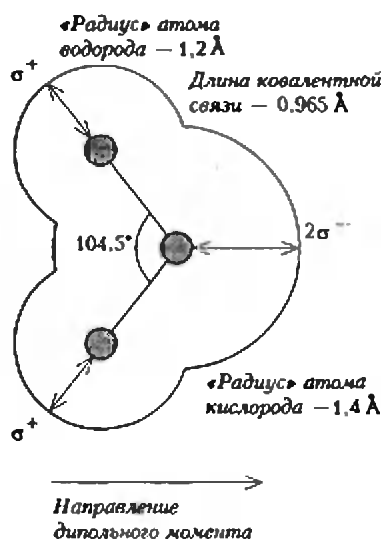


Рис. 1. Кристаллографическая модель молекулы воды

под действием электростатических сил каждая молекула воды стремится связаться водородной связью с четырьмя соседними молекулами (рис. 2). Водородные связи между молекулами воды возникают не только в жидкой фазе, но и в кристаллах льда, и в водяном паре.

Длина водородной связи в кристаллах льда составляет 1,77 Å, а среднее расстояние между атомами кислорода в соседних молекулах — 2,76 Å. Из-за явного расхождения этих величин структура льда

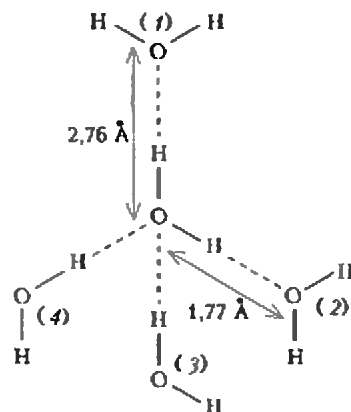


Рис. 2. Водородные связи молекулы воды с ближайшими соседними молекулами

неплотная, в ней имеются пустоты, соизмеримые с размерами самих молекул. При плавлении льда его кристаллическая решетка разрушается, возрастает число молекул со свободными связями, которые заполняют пустоты, поэтому плотность воды при повышении температуры от 0 до +4 °С увеличивается. Дальнейшее повышение температуры приводит к увеличению расстояний между молекулами и средних расстояний между самими атомами внутри молекулы, что и обуславливает уменьшение плотности воды при температуре выше +4 °С.

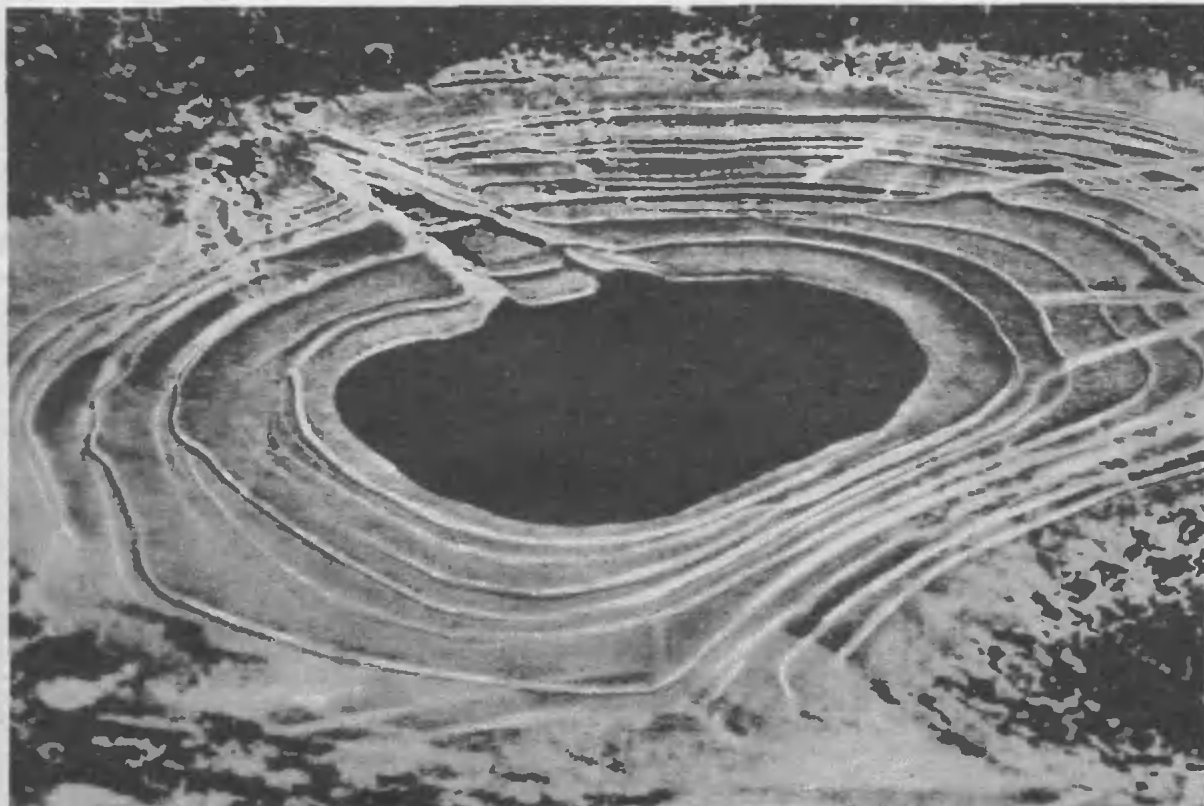
Поздней осенью по ночам температура воздуха опускается ниже 0 °С, а днем заметно повышается. При таких колебаниях дневных и ночных температур около 0 °С образовавшийся за ночь на поверхности лужи лед днем подтаивает. Следующей ночью процесс замерзания нового слоя льда на месте подтаявшего повторяется. В результате сверху поверхность льда оказывается ровной, а снизу нет. Нижняя поверхность льда на замерзающей луже очень похожа на поперечный срез ствола дерева: в обоих случаях отчетливо видны концентрические кольца. Но если ширина древесного кольца может рассказать о годичной температуре, то ледяные кольца показывают изменение суточной температуры: чем ниже была ночью температура, тем большая поверхность лужи покрывается льдом. К сожалению, следы ледяного цикла недолговечны.

Итак, с течением времени границы кольца то подтаивают, то подмерзают, и на поверхности льда появляются утолщения вдоль границы вода — лед. Свет отражается от слоев льда разной толщины по-разному, вот почему на поверхности замерзшей лужи отчетливо видны незатейливые суточные кольца (см. приведенную фотографию). Ширина образующегося кольца, толщина льда и время замерзания лужи зависят от многих факторов — скорости изменения температуры, наличия ветра, освещения прямыми солнечными лучами, теплопроводности почвы, глубины и профиля дна лужи, наличия примесей в воде и т.д. Например — чем выше теплопроводность дна лужи, тем быстрее она замерзает; лужа на асфальте замерзает скорее, чем лужа на песчаной почве и т.п.

Обычно лужа начинает замерзать от краев. Это связано с тем, что глубина воды у берега меньше, а площадь образующихся колец с приближением к центру уменьшается.

А теперь — эксперименты. Смоделируем «лужу», используя пластиковые ячей-





ки прямоугольной формы, заполненные водой (для получения кубиков льда в домашнем холодильнике), и исследуем на этой модели некоторые особенности процесса заморзания лужи.

Прежде всего можно исследовать зависимость времени полного заморзания «лужи»  $t$  от объемной концентрации твердых примесей  $C$  (рис. 3), в качестве которых мы использовали смесь земли с

песком. Как следует из результатов модельных исследований, при наличии твердых примесей в воде заморзание происходит быстрее по сравнению с чистой водой в том случае, когда процентное отношение примесей превышает 20%. Если же оно составляет не более 10%, то время заморзания чистой воды и воды, содержащей твердые примеси, практически одно и то же.

Во второй части эксперимента исследовалось влияние начальной температуры воды на время заморзания «лужи». Результаты эксперимента показаны на рисунке 4 — для кривой 1 начальная температура  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ , для кривой 2 —  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ . Вид кривых заморзания «лужи» в обоих случаях сходен, но кривая 2 смещена параллельно кривой 1 в направлении оси абсцисс на  $\Delta t$  порядка 1 часа.

Предложенная нами модель «лужи» позволяет проанализировать лишь некоторые количественные характеристики процесса ее заморзания. Понятно, что такие опыты имеют и недостатки. В частности, моделируя процесс заморзания «лужи», мы помещали ячейки в морозильную камеру холодильника с постоянной температурой ( $T = -4^\circ\text{C}$ ). В этом отличие нашего эксперимента от реального процесса, при котором температура снижается постепенно.

В заключение хотелось бы отметить, что повод для самостоятельных размышлений и несложных исследований можно найти не только поздней осенью и не только в обычной луже.

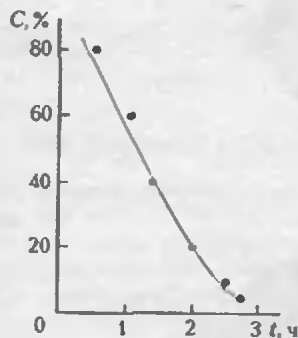


Рис. 3. Зависимость времени заморзания «лужи» от объемной концентрации примесей

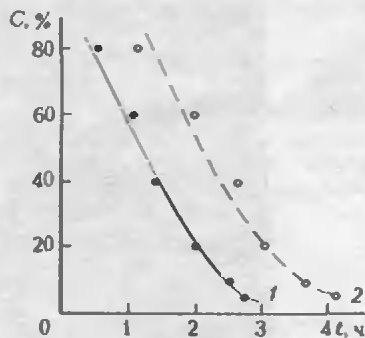


Рис. 4. Влияние начальной температуры «лужи» на время ее заморзания — в случае 2 начальная температура выше, чем в случае 1

# Соударение тел

В. КОЗЛОВ

## Введение

Некоторые физические теории построены по образцу, принятому в математике, — из небольшого числа физических утверждений, которые играют ту же роль, что аксиомы в математических теориях, логически строго выводятся разнообразные следствия. Эта статья посвящена одной такой теории — теории соударения тел. Явление

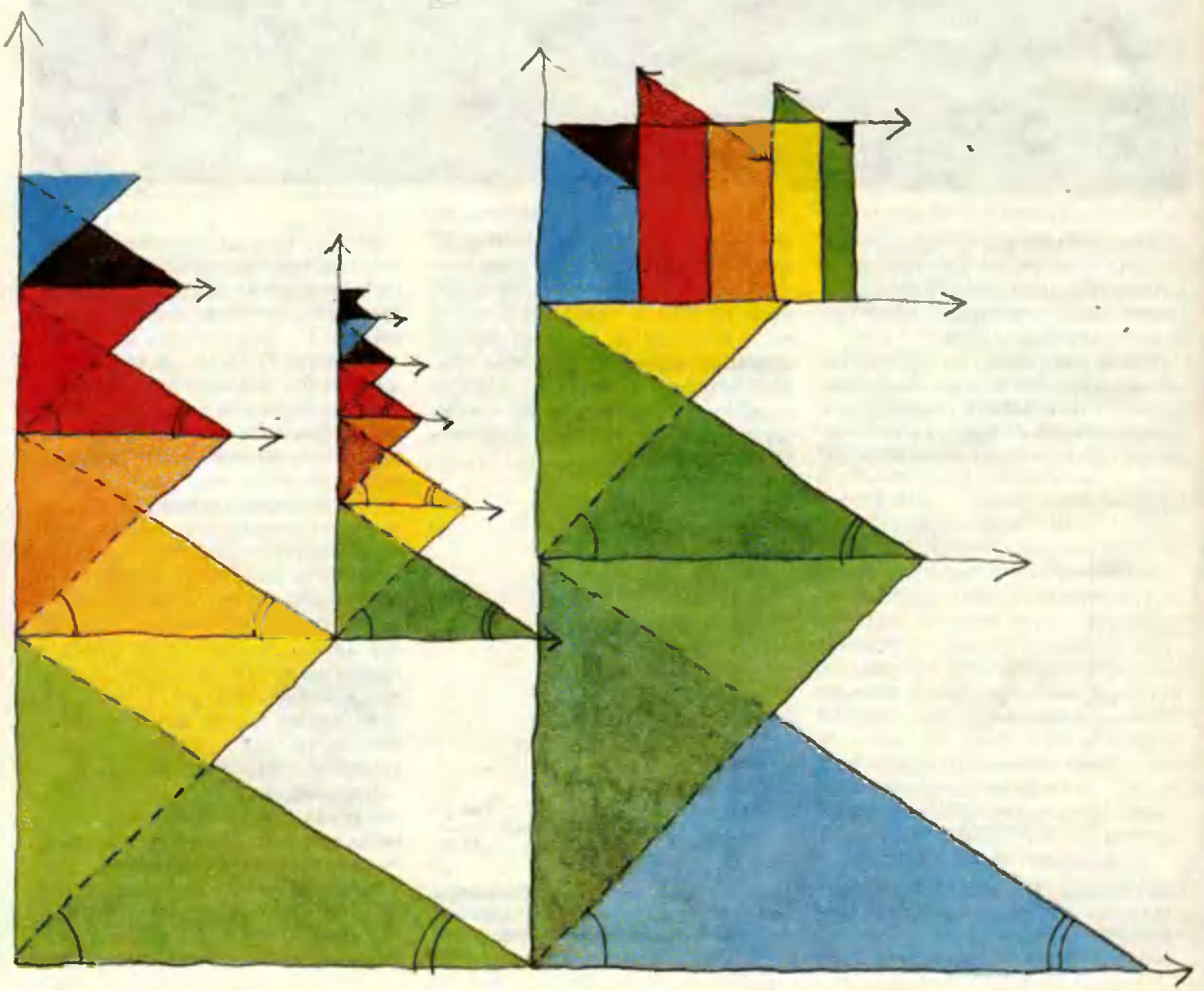
удара хорошо описывается несложной математической моделью. Неудивительно поэтому, что законы удара были установлены до открытия основных принципов динамики.

Еще Галилей поставил ряд опытов для выяснения законов соударения тел. Эти опыты, правда, не привели его к определенным выводам. Современник Галилея пражский профессор Марци в своем сочинении «De proportione motus» (1639) опубликовал некоторые результаты своих исследований явления удара. В частности, ему

было известно, что тело, упруго ударившись о такое же покоящееся тело, теряет свою скорость, сообщая ее этому телу. Первое детальное исследование законов удара было предпринято в 1668 году по предложению Лондонского королевского общества. Три выдающихся механика и математика — Валлис, Рен и Гюйгенс — представили свои работы, в которых они изложили законы движения соударяющихся тел.

Джон Валлис ограничился, не огоркаясь этого, рассмотрением абсо-

*Эта статья была напечатана в «Кванте» № 9 за 1988 год.*



дно неупругого удара. Он исходил из гипотезы о сохранении суммарного импульса сталкивающихся тел. Кристофер Рен изложил правила расчета упругого удара. Рен, как и Валлис, не привел никаких теоретических рассуждений, однако для проверки своих правил он проделал ряд простых и убедительных опытов. На эти опыты ссылался Ньютон в своих знаменитых «Математических началах натуральной философии» (1687). Конкурсный мемуар Христиана Гюйгенса был наиболее полным исследованием по теории удара. В нем был намечен вывод соотношений теории удара, основанный на принципе относительности Галилея. И — как часто бывает в истории — наиболее весомый с точки зрения потомков труд конкурса не выиграл и не был признан современной научной общественностью. Лондонское королевское общество напечатало лишь мемуары Валлиса и Рена. Может быть, дело в том, что законы сохранения энергии и импульса были еще слишком новы и вызвали у тогдашних ученых внутренний протест? Но так или иначе, мемуар Гюйгенса дошел до нас — он напечатан в 1669 году в парижском «Журнале ученых».

## Сохранение импульса

Рассмотрим ряд задач механики, связанных с исследованием соударения двух тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся по прямой без воздействия каких-либо сил. Пусть  $v_1$  и  $v_2$  — скорости этих тел до удара (рис. 1). Мы будем считать скорость алгебраической величиной: если тело движется вправо, то его скорость положительна, а если влево, то отрицательна. В момент удара на тела действуют только внутренние силы; поэтому их суммарный импульс  $m_1v_1 + m_2v_2$  сохраняется. Пусть  $v_1'$  и  $v_2'$  — скорости тел после удара. Из сохранения суммарного импульса получаем соотношение

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2'. \quad (1)$$

Из одного этого уравнения, конечно, нельзя найти  $v_1'$  и  $v_2'$ . Это не удивительно: соударения бывают разными. Есть упругие и неупругие. Например, при абсолютно неупругом ударе тела слипаются и движутся затем как одно



Рис. 1

целое. В этом случае  $v_1' = v_2' = v$  и из формулы (1) находим скорость слипшихся тел после удара:

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

**Задача 1.** Пусть  $v_1 \leq v_2$ . Докажите, что  $v_1 \leq v \leq v_2$ .

## Изменение кинетической энергии

Кроме импульса в механике важную роль играет кинетическая энергия, равная  $mv^2/2$ , где  $m$  — масса тела,  $v$  — его скорость. Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух тел. В этом случае

$$\Delta T = \left( \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} \right) - \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}$$

называется *потерянной кинетической энергией*.

Следующее утверждение называется первой теоремой Карно:

*Потерянная кинетическая энергия равна энергии точки массой  $\mu = \frac{1}{1/m_1 + 1/m_2}$ , которая движется со скоростью, равной разности скоростей точек до удара:*

$$\Delta T = \frac{\mu(v_1 - v_2)^2}{2}.$$

**Задача 2.** Докажите первую теорему Карно.

Масса  $\mu$  называется в механике *приведенной массой системы*. Она равна половине среднего гармонического чисел  $m_1$  и  $m_2$ .

**Задача 3.** Докажите неравенства

$$\mu \leq \frac{m_1 + m_2}{4}, \quad \mu \leq \frac{1}{2} \sqrt{m_1 m_2}.$$

Высдем в рассмотрение *потерянные скорости*:  $u_1 = v - v_1$ ,  $u_2 = v - v_2$ , с помощью которых формулируется вторая теорема Карно:

*Потерянная кинетическая энергия равна суммарной кинетической энергии тел с массами  $m_1$  и  $m_2$ , движущихся с потерянными скоростями  $u_1$  и  $u_2$ :*

$$\Delta T = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}.$$

**Задача 4.** Докажите вторую теорему Карно.

Рассмотрим теперь противоположный случай: абсолютно упругий удар. По определению, в этом случае, кроме суммарного импульса, сохраняется еще

суммарная кинетическая энергия:

$$m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1(v_1')^2 + m_2(v_2')^2.$$

**Задача 5.** Докажите, что в случае абсолютно упругого удара относительные скорости тел до и после удара равны по величине и противоположны по направлению:

$$v_1 - v_2 = -(v_1' - v_2'). \quad (3)$$

**Задача 6.** Докажите равенства

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2,$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2. \quad (4)$$

В частном случае, когда  $m_1 = m_2$ , эти формулы приобретают наиболее простой вид:

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = v_1.$$

Следовательно, в момент абсолютно упругого удара происходит обмен скоростями. Как уже говорилось, этот эффект был впервые описан Марци.

Абсолютно упругий удар тел равной массы удобно изображать на графиках движения тел, т.е. на графиках зависимости координат от времени (рис. 2). Эта графическая интерпретация используется в следующей задаче.

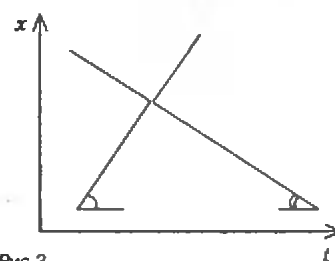


Рис. 2

**Задача 7.** По прямой движутся с постоянными (не обязательно равными) скоростями несколько одинаковых шариков. Предположим, что соударения между ними абсолютно упругие и в каждом соударении участвуют только два шарика. Докажите, что общее число соударений конечно.

Рассмотрим еще один частный случай, когда масса  $m_1$  много меньше массы  $m_2$ . Тогда

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1/m_2 - 1}{m_1/m_2 + 1} \approx -1,$$

$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1/m_2}{m_1/m_2 + 1} \approx 0,$$

$$\frac{2m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{m_1/m_2 + 1} \approx 2.$$

так как отношение масс  $m_1/m_2$  близко к нулю. С учетом этих замечаний формулы (4) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} v_1' &= -v_1 + 2v_2 = v_2 - (v_1 - v_2), \\ v_2' &= v_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, второе тело не изменит своей скорости, а первое будет двигаться за вторым, отставая от него со скоростью, равной их относительной скорости до удара.

На практике, однако, чаще встречаются случаи, когда в момент удара тела не слипаются, но их суммарная энергия не сохраняется. В этой ситуации обычно принимают гипотезу Ньютона, заменяя соотношение (3) следующим соотношением:

$$e(v_1 - v_2) = -(v_1' - v_2').$$

Здесь  $e$  — некоторый безразмерный коэффициент, заключенный в промежутке от 0 до 1 и определяемый обычно из эксперимента. Число  $e$  называют коэффициентом восстановления. При  $e = 0$  получается абсолютно неупругий удар, а при  $e = 1$  удар будет абсолютно упругим.

Пусть  $u_1$  и  $u_2$  снова обозначают потерянные скорости.

Величина потерянной энергии в общем случае вычисляется с помощью обобщенной теоремы Карно:

$$\Delta T = \frac{1-e}{1+e} \left( \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2} \right).$$

При  $e = 0$  это утверждение известно нам как вторая теорема Карно; при  $e = 1$  потеря энергии вообще не происходит — удар абсолютно упругий.

**Задача 8.** Докажите обобщенную теорему Карно.

### Адиабатический инвариант

В качестве поучительного применения формул (5) рассмотрим следующую задачу. Шарик движется между двумя стенками, одна из которых неподвижна, а другая приближается к ней со скоростью  $V$  (рис.3; шарик начинает движение от неподвижной стенки). Удар шарика о стенки абсолютно упругий. После столкновения с неподвижной стенкой величина скорости шарика не меняется, а после каждого столкновения с подвижной стенкой скорость шарика (см. формулы (5)) увеличивается на  $2V$ . Следовательно, энергия шарика тоже увеличивается. Пусть  $v_0$  — величина скорости шарика

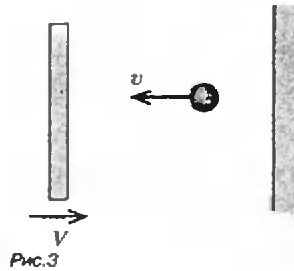


Рис.3

в начальный момент времени (т.е. в момент «нулевого» удара о неподвижную стенку).  $l_0$  — расстояние между стенками в этот момент. Аналогично, через  $v_n$  и  $l_n$  обозначим величину скорости шарика и расстояние между стенками в момент  $n$ -го удара шарика о неподвижную стенку. Положим

$$I_n = v_n l_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

**Задача 9.** Докажите, что  $I_n = I_0$ .

Усложним задачу. Введем функцию  $I(t)$ , равную произведению величины скорости  $v(t)$  шарика на расстояние  $l(t)$  между стенками в произвольный момент времени  $t$ . Пусть  $t_0, t_1, \dots$  — моменты удара шарика о неподвижную стенку. Согласно утверждению задачи 9,  $I(t_n) = I_0$  для всех  $n \geq 0$ . Однако при остальных значениях  $t$  получаем  $I(t) \neq I_0$ .

**Задача 10.** Докажите неравенство

$$\left| \frac{I(t) - I_0}{I_0} \right| \leq \frac{V}{v_0 + V}.$$

Подсказкой к решению этой задачи служит график функции  $I(t)$ , изображенный на рисунке 4.

Следовательно, если скорость стенки много меньше скорости шарика ( $V \ll v_0$ ), то величина  $I(t)$  будет очень мало отличаться от своего первоначального значения  $I_0$ . В механике такие величины называются адиабатическими инвариантами (в термодина-

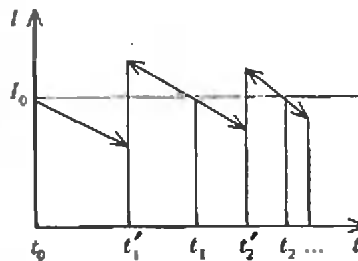


Рис.4

мике адиабатическим процессом называется процесс, проходящий без выделения и поглощения тепла).

### Баллистический маятник

В качестве еще одного применения законов удара рассмотрим задачу о баллистическом маятнике, с помощью которого измеряют скорости движущихся тел. Он состоит из трубы массой  $M$ , заполненной песком и подвешенной на невесомом тросе длиной  $l$  (рис.5). Снаряд массой  $m$ , попадая в трубу, застревает в песке. Происходит очень быстрая потеря скорости снаряда — абсолютно неупругий удар.

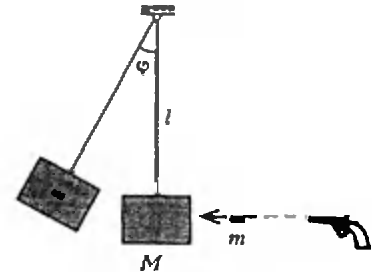


Рис.5

**Задача 11.** Зная максимальный угол отклонения трубы  $\phi$ , найдите скорость снаряда.

Баллистический маятник изобретен английским механиком Робинсоном и описан в книге «Новые принципы пушечной стрельбы» (1742).

### Принцип относительности и закон сохранения импульса

Мы решили ряд конкретных задач из механики соударяющихся тел. Теперь снова можно обратиться к основным соотношениям теории удара и обсудить их смысл и происхождение.

В мемуаре Гюйгенса «О движении тел под воздействием удара» закон сохранения импульса выводится из принципа относительности Галилея. Мы воспроизведем рассуждения Гюйгенса для случая абсолютно неупругого удара.

Сначала напомним определение инерциальной системы отсчета и формулировку принципа относительности. Под системой отсчета будем понимать платформу, снабженную линейкой и часами. С ее помощью можно определять положение тел на прямой и течение времени. Предположим, что одна система отсчета движется относительно другой с постоянной ско-

ростью. Принцип относительности Галилея утверждает, что все законы механики (в том числе и законы удара) имеют в обеих системах отсчета одинаковый вид. Этот принцип относительности является очень общим: он справедлив и в релятивистской механике. Специфика ньютоновской механики проявляется в том, как связаны системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью.

Эта связь выражается преобразованиями Галилея. Предположим, что в обеих системах производится наблюдение одного и того же тела. Пусть в первой системе отсчета координата тела на прямой равна  $x$ , а часы показывают время  $t$ ; во второй системе значения координаты и времени равны  $x'$  и  $t'$ . Если  $v$  — постоянная скорость движения второй системы отсчета относительно первой, то

$$x = x' + vt' + a, \quad t = \pm t' + b,$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые константы.

Обратимся к выводу формулы (2) для абсолютно неупругого удара.

Рассуждения Гюйгенса включают анализ нескольких случаев.

а) Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, когда сталкиваются два одинаковых тела с массами  $m$ , движущиеся навстречу друг другу со скоростями  $v$  и  $-v$ . В силу предположения о неупругом характере удара тела слипаются, образуя одно тело массой  $2m$ . По соображениям симметрии, это тело после удара будет покоиться.

б) Рассмотрим более сложный случай, когда сталкиваются две одинаковые массы  $m$ , имевшие до момента удара произвольные скорости  $v_1$  и  $v_2$ . Перейдем к новой инерциальной системе отсчета  $S'$ , которая движется относительно исходной системы  $S$  с постоянной скоростью  $v = (v_1 + v_2)/2$ . В системе  $S'$  картина движения тел будет, как в случае а): тела одинаковой массы сближаются с равными по величине скоростями  $(v_1 - v_2)/2$  и  $(v_2 - v_1)/2$ . Согласно принципу относительности и заключению пункта а), после удара тело массой  $2m$  будет покоиться в системе  $S'$ . Следовательно, относительно исходной системы  $S$  оно будет двигаться со скоростью  $(v_1 + v_2)/2$ . Итак, формула (2) установлена в случае, когда  $m_1 = m_2$ .

в) Пусть теперь имеются три одинаковых тела, каждое массой  $m$  (рис. 6). В начальный момент все они покоятся, причем тела 1 и 2 соприкасаются.

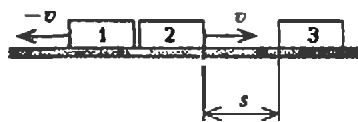


Рис. 6

Предположим, что тела 1 и 2 разлетаются в разные стороны (например, в результате взрыва). Ввиду симметрии их скорости будут равны по величине. Первое тело будет беспрепятственно двигаться влево со скоростью  $-v$ , а второе будет двигаться вправо со скоростью  $v$  и вскоре столкнется с телом 3. Согласно результату пункта б), тело «2+3» массой  $2m$  будет после удара двигаться вправо со скоростью  $v/2$ . Если расстояние между телами очень мало, то столкновение и слипание тел 2 и 3 произойдет практически мгновенно. Поэтому можно считать, что с самого начала тела 2 и 3 образовывали одно целое, и мы приходим к следующему выводу: если в начальный момент времени два тела с массами  $m$  и  $2m$  соприкасались и затем начали разлетаться в разные стороны, то скорость тела массой  $2m$  будет в два раза меньше скорости тела массой  $m$ .

г) Рассмотрим случай, когда два тела с массами  $m$  и  $2m$  движутся навстречу друг другу со скоростями  $v$  и  $-v/2$  соответственно. Утверждается, что после абсолютно неупругого удара слипшееся тело массой  $3m$  будет покоиться (в соответствии с формулой (2)). Действительно, мы можем вообразить новую систему отсчета  $S'$ , в которой часы идут в «обратную сторону». Относительно системы  $S'$  все тела будут двигаться в противоположном направлении с той же по абсолютной величине скоростью, поэтому нам остается воспользоваться принципом относительности и результатом пункта в).

д) Теперь обратимся к случаю, когда тела с массами  $m$  и  $2m$  движутся с произвольными скоростями  $v_1$  и  $v_2$ . Как и в рассуждении пункта б), перейдем к новой системе отсчета  $S'$ , которая движется относительно  $S$  со скоростью  $v_1 + 2v_2/3$ . Именно с этой скоростью движется их общий центр масс (проверьте!). В системе  $S'$  центр масс тел  $m$  и  $2m$  покоится, тело  $m$  подлетает к нему со скоростью

$$v'_1 = \frac{v_1 + 2v_2}{3} - v_1 = -\frac{2}{3}(v_1 - v_2),$$

а тело  $2m$  — со скоростью

$$v'_2 = \frac{v_1 + 2v_2}{3} - v_2 = \frac{1}{3}(v_1 - v_2).$$

Мы видим, что относительные скорости тел отличаются знаками и  $|v'_1| = |2v'_2|$ . Следовательно, согласно пункту г), после столкновения тело массой  $3m$  будет покоиться в системе  $S'$ , а относительно исходной системы  $S$  оно будет двигаться со скоростью

$$v = \frac{mv_1 + 2mv_2}{3m} = \frac{v_1 + 2v_2}{3}.$$

Таким образом, формула (2) установлена в случае, когда  $m_2 = 2m_1$ .

Рассуждая аналогично, мы можем обосновать формулу (2) для случая рационального отношения масс  $m_1$  и  $m_2$ . Ее обоснование для иррациональных отношений  $m_1/m_2$  носит уже формальный характер и связано со строгим введением понятия действительного числа. Дело здесь обстоит так же, как с выводом формулы площади прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$ : для соизмеримых  $a$  и  $b$  прямоугольник можно разбить на одинаковые квадраты, а если  $a$  и  $b$  несоизмеримы, то нужно использовать приближение иррациональных чисел рациональными.

С математической точки зрения рассуждения Гюйгенса, быть может, нельзя признать вполне строгими. Но мы и не стремились дать строгое доказательство формулы для абсолютно неупругого удара. У нас была иная цель: показать, что идеи Гюйгенса с необходимостью приводят к закону сохранения импульса. Подчеркнем, что мы исходили лишь из принципа относительности Галилея и не использовали основные принципы динамики Ньютона (например, закон равенства действия и противодействия). Рассуждение Гюйгенса показывает, что закон сохранения импульса следует из симметричности (или инвариантности) законов механики относительно преобразований Галилея. Это отражает общий факт: всякая симметрия законов механики приводит к своему закону сохранения. Например, инвариантность относительно поворотов пространства влечет закон сохранения момента импульса, а инвариантность относительно сдвигов оси времени — закон сохранения энергии. Общая теорема, связывающая симметрии с законами сохранения, была открыта знаменитым немецким математиком Эмми Нётер (1882–1935).

# Геометрическая оптика

Ю. ЧЕШЕВ

**С**ВЕТ представляет собой электромагнитное излучение, испускаемое источником в диапазоне длин волн порядка 400 — 800 нм. Линии, по которым распространяются электромагнитные волны, называют лучами, или лучевыми траекториями. Реально световой луч — это узкий расходящийся световой пучок.

Оказывается, что для большого круга задач можно пользоваться геометрической оптикой лучей, основанной на принципе Ферма. Смысл его заключается в том, что световая волна всегда распространяется таким образом, что длина светового луча, проходящего от одной точки пространства до другой, должна быть минимальной. В случае пространственно однородной среды этот принцип приводит к закону прямолинейного распространения света, а в случае падения волны на плоскую границу раздела двух сред — к законам отражения и преломления света:

$$\alpha = \varphi \text{ и } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1},$$

где  $\alpha$  и  $\varphi$  — углы падения и отражения соответственно,  $\beta$  — угол преломления, а  $n_1$  и  $n_2$  — показатели преломления двух сред. Не следует забывать и об обратности световых лучей, т.е. об их взаимности: луч, идущий в обратном направлении, идет тем же путем, каким пришел и прямой луч. Именно принцип взаимности и принцип Ферма позволяют решать физические задачи на геометрическую оптику.

**Задача 1.** На расстоянии  $d$  от плоского зеркала расположен точечный источник света  $S$ . Построением найдите положение изображения источника.

Проведем луч  $SA_1$ , идущий от источника под некоторым углом  $\alpha_1$  к линии  $OO_1$ , перпендикулярной плоскости зеркала (рис. 1). Согласно закону отражения света, отраженный луч направлен под углом  $\alpha_1$  к нормали к зеркалу. Чтобы получить изображение источника, через точку  $S$  проведем еще один луч

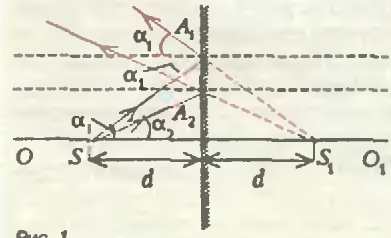


Рис. 1

— под углом  $\alpha$  к  $OO_1$ , который пересечет поверхность зеркала в точке  $A_2$ , и построим второй отраженный луч. Продолжим оба отраженных луча за зеркало до их пересечения в точке  $S_1$ . Из построения видно, что треугольники  $SA_1S_1$  и  $SA_2S_1$  — равнобедренные, так что  $SA_1 = A_1S_1$  и  $SA_2 = A_2S_1$ . Следовательно, изображение  $S_1$  находится на таком же расстоянии  $d$  от зеркала, что и источник  $S$ . Полученное таким образом изображение в зеркале является кажущимся (мнимым). Вообще термин «мнимое изображение» употребляется в том случае, когда его нельзя получить на экране.

**Задача 2.** Определите угол отклонения светового луча, прошедшего через призму с малым углом при вершине  $\theta$  и показателем преломления материала призмы  $n$ .

Пусть  $\alpha$  — угол падения луча  $OA$  на боковую поверхность призмы (рис. 2),

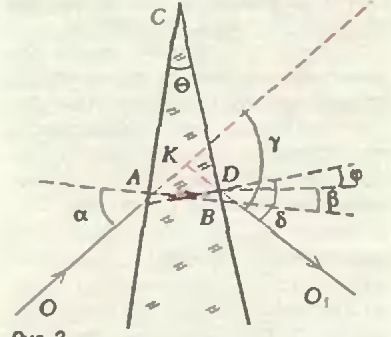


Рис. 2

$\beta$  — угол его преломления на первой границе раздела воздух — призма,  $\varphi$  — угол падения луча на вторую границу раздела призма — воздух,  $\delta$  — угол преломления на этой границе,  $\gamma$  — искомый угол отклонения луча  $OA$  от своего первоначального направления. Используя закон преломления света при учете малости углов ( $\sin \alpha = \alpha$ ), получим

$$\frac{\alpha}{\beta} = n, \quad \frac{\varphi}{\delta} = \frac{1}{n}.$$

Угол  $\gamma$  — внешний угол треугольника  $AKD$ , поэтому

$$\gamma = \alpha - \beta + \delta - \varphi = \beta(n-1) + \delta(n-1) = (n-1)(\beta + \delta).$$

Сумма углов треугольника  $ACD$  равна  $180^\circ$ , следовательно,

$$\theta + \frac{\pi}{2} - \beta + \frac{\pi}{2} - \varphi = \pi, \text{ или } \beta + \varphi = \theta.$$

Отсюда находим

$$\gamma = \theta(n-1).$$

Используя это соотношение, можно сконструировать оптическую систему, состоящую из набора призм (в том числе усеченных), положенных основаниями друг на друга. Неограниченно увеличивая число таких призм при одновременном уменьшении их высот получаем оптический прибор, называемый линзой. Реальная линза представляет собой тело, ограниченное двумя сферическими (иногда цилиндрическими или еще более сложными) поверхностями. Линзу можно считать тонкой, если углы микропризм, ее составляющих, достаточно малы, т.е. если толщина линзы (вдоль оси) мала по сравнению с радиусами кривизны ее поверхностей. В тонкой линзе смещением луча, идущего под некоторым углом к главной оптической оси и проходящего через ее центр, можно пренебречь.

Линзы бывают положительные (собирающие) и отрицательные (рассеивающие). В случае положительной линзы луч, падающий на нее, после преломления отклоняется к главной оптической оси, а в случае отрицательной линзы — от главной оптической оси.

**Задача 3.** Используя свойства тонких линз, получите формулу положительной линзы.

Для решения этой задачи воспользуемся следующими свойствами:

- 1) Луч, идущий через оптический центр линзы, проходит ее насквозь не преломляясь.
- 2) Луч, идущий параллельно главной оптической оси линзы, после преломления в ней проходит через ее фокус. Таким образом, все лучи, параллельные главной оптической оси линзы, собираются в одной точке (фокусе), расположенной на этой оси. Плоскость, перпендикулярная главной оптической оси линзы и проходящая через ее фокус, называется фокальной плоскостью.
- 3) Лучи, проходящие через фокус линзы, выходят из нее пучком, параллельным главной оптической оси.

Пусть  $AB$  — предмет, расположенный на некотором расстоянии слева от собирающей линзы (рис. 3). Построим его

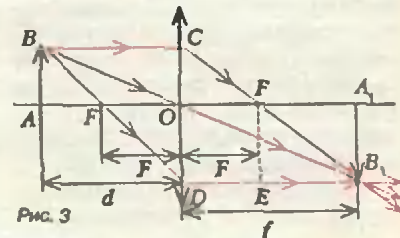


Рис. 3

изображение в линзе. Проведем луч  $BC$  параллельно главной оптической оси линзы, после преломления в линзе он пройдет через ее фокус  $F$  по пути  $CFB_1$ . Луч  $BO$ , идущий через центр линзы, пройдет ее насквозь не преломляясь и пересечет луч  $CFB_1$  в точке  $B_1$ . Заметим, что этих двух лучей достаточно, чтобы получить изображение, даваемое линзой. Но можно провести еще один луч, проходящий через передний фокус линзы  $F$ , — после преломления в линзе он выйдет из нее параллельно главной оптической оси и тоже пройдет через точку  $B_1$ . Итак, мы построили изображение  $A_1B_1$  предмета  $AB$  в линзе. Это изображение — действительное.

Обозначим  $d$  расстояние от предмета до линзы,  $f$  — расстояние от линзы до изображения и  $F$  — фокусное расстояние линзы. Отношение поперечного размера изображения к поперечному размеру предмета называется линейным увеличением линзы  $\Gamma$ . В силу подобия треугольников  $AOB$  и  $A_1OB_1$ , а также треугольников  $B_1CD$  и  $B_1FE$  для увеличения  $\Gamma$  имеем

$$\Gamma = \frac{l}{d} \text{ и } \Gamma = \frac{f-F}{f},$$

откуда и получаем формулу тонкой положительной линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}.$$

**Задача 4.** С помощью тонкой собирающей линзы получено изображение треугольника  $BACGDE$ . Основание треугольника  $EDG$  лежит на главной оптической оси линзы,  $AB = AC$ . Отрезок  $DG$  изображается с увеличением  $\beta_1$ , отрезок  $ED$  — с увеличением  $\beta_2$ . С каким увеличением изображается отрезок  $AD$ ?

Пусть  $d$  — расстояние от центрального зубца треугольника до линзы,  $f$  — расстояние от линзы до его изображения (рис. 4). Построим изображения зубцов  $BE$ ,  $AD$  и  $CG$ . Обозначим отрезки  $ED$  и  $DG$  через  $x$ , расстояния между изображениями зубцов  $A_1D_1$  и  $C_1G_1$  через  $y_1$ , а зубцов  $B_1E_1$  и  $A_1D_1$  через  $y_2$ . Используя результаты предыдущей задачи, для увеличения отрезка  $AD$  можно записать

$$\Gamma = \frac{F}{d-F},$$

где  $F$  — фокусное расстояние линзы. Отсюда

$$d = \frac{F(1+\Gamma)}{\Gamma} \text{ и } f = F(1+\Gamma).$$

Теперь запишем формулу линзы для зубцов  $CG$  и  $BE$ :

$$\frac{1}{d \mp x} + \frac{1}{f \pm y} = \frac{1}{F}.$$

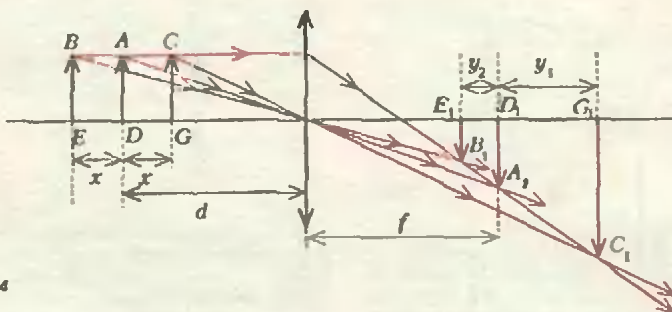


Рис. 4

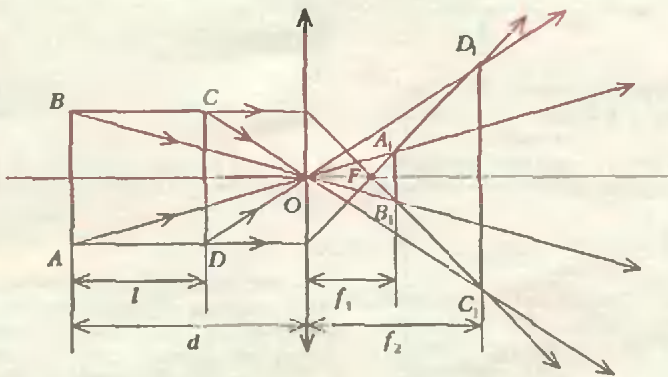


Рис. 5

где верхний знак в знаменателях относится к зубцу  $CG$ , а нижний — к зубцу  $BE$ . После несложных преобразований получаем

$$\frac{xy_1}{F} = \frac{y_1}{\Gamma} - x\Gamma \text{ и } \frac{xy_2}{F} = -\left(\frac{y_2}{\Gamma} - x\Gamma\right).$$

Поскольку увеличения отрезков  $DG$  и  $DE$  равны  $\beta_1$  и  $\beta_2$  соответственно, используя полученные соотношения, легко найти выражение для искомого увеличения:

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2\beta_1\beta_2}{\beta_1 + \beta_2}}.$$

**Задача 5.** Квадрат со стороной  $l = 4$  см расположен симметрично относительно главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием  $F = 1$  см (рис. 5). Дальняя сторона квадрата находится от линзы на расстоянии  $d = 6$  см. Определите отношение площадей квадрата и его изображения в линзе.

Построим изображение квадрата. Для этого проведем лучи  $BC$  и  $AD$ , параллельные главной оптической оси (которые после преломления в линзе пройдут через ее фокус  $F$ ), и лучи, выходящие из всех вершин квадрата и проходящие через центр линзы (они

идут не преломляясь). Изображением квадрата будет трапеция  $A_1B_1C_1D_1$ .

Пусть  $A_1B_1 = l_1$  и  $C_1D_1 = l_2$ . Из подобия треугольников  $ABO$  и  $A_1B_1O$ , а также треугольников  $CDO$  и  $C_1D_1O$  получим

$$\frac{l_1}{l} = \frac{d}{f_1} \text{ и } \frac{l_2}{l} = \frac{d-l}{f_2}.$$

Формула линзы, записанная для «предметов»  $AB$  и  $CD$  и их соответствующих изображений, дает

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F} \text{ и } \frac{1}{d-l} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{F}.$$

Решая систему полученных уравнений, находим

$$f_1 = \frac{6}{5} \text{ см, } f_2 = 2 \text{ см, } l_1 = \frac{4}{5} \text{ см, } l_2 = 4 \text{ см}$$

и искомое отношение площадей

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A_1B_1C_1D_1}} = \frac{l^2}{\frac{1}{2}(l_1+l_2)(f_2-f_1)} = \frac{25}{3}.$$

**Задача 6.** Оптическая система состоит из рассеивающей линзы и плоского зеркала, расположенного в фокальной плоскости линзы перпендикулярно ее главной оптической оси (рис. 6). Предмет  $AB$  находится в фокальной плоскости перед линзой. Построением найдите





**Упражнения**

1. Перпендикулярно главной оптической оси тонкой положительной линзы с фокусным расстоянием  $F$  расположено плоское зеркало (рис. 8). Эта оптическая система создает действительное изображение предмета  $A$ , находящегося между линзой и ее фокусом, с увеличением  $\Gamma = F/d$ , где  $d$  — расстояние от предмета до линзы. Найдите расстояние между линзой и зеркалом.

2. Трапеция  $ABCD$  расположена так, что ее параллельные стороны перпендикулярны главной оптической оси  $OO_1$  (рис. 9). Линза создает действительное изображение трапеции в виде прямоугольника. Если повернуть трапецию на  $180^\circ$  вокруг стороны  $AB$ , то линза создаст ее изображение в виде трапеции с теми

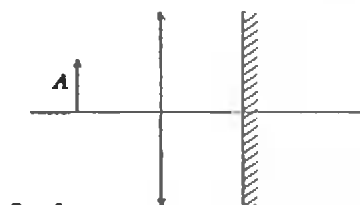


Рис. 8

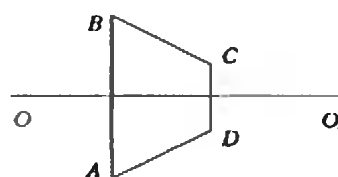


Рис. 9

же самыми углами. С каким увеличением изображается сторона  $AB$ ?

3. Оптическая система, состоящая из собирающей и рассеивающей тонких линз, расположенных на одной оптической оси на расстоянии  $b = 4$  см друг от друга, создает действительное изображение предмета, находящегося

на расстоянии  $a = 6$  см от рассеивающей линзы, с поперечным увеличением  $\Gamma = 1/8$ . Изображение получено на экран, находящемся на расстоянии  $s = 3$  см от собирающей линзы. Построением определите положения главных фокусов обеих линз и найдите их фокусные расстояния.

# Контроль геометрических решений

Л. ШТЕРНБЕРГ

— **Н** АДО же! Арифметическая ошибка! А ведь все правильно делал! — К сожалению, подобные высказывания часто можно услышать при показе письменных работ по математике. Хорошо, если арифметическая ошибка где-то в конце решения; а если из-за нее не удалось доказать свойство, на котором все строится? Можно ли сделать так, чтобы арифметическая ошибка сама кричала о себе: «Внимание! Ошибка!» Оказывается, можно. Несколько элементарных приемов контроля, и при умелом применении сквозь такой контроль не проскакивает ни одна арифметическая ошибка. Конечно, существуют задачи, к которым эти приемы неприменимы, но к большинству задач они подходят прекрасно.

Простейший прием — *контроль размерности*.

**Пример 1.** Дана правильная четырехугольная пирамида со стороной основания  $a$  и радиусом описанного шара  $r$ . Определите ее объем.

Три школьника решили эту задачу и получили три разных ответа:

$$1) V = \frac{2r^2 a}{a^2 - 4r^2};$$

$$2) V = \frac{2r^2 a^3}{a^2 - 4r^2};$$

$$3) V = \frac{2r^2 a^2}{a^2 - 4r^2}.$$

Какой ответ правильный? С одного взгляда можно отбросить два из них как заведомо ошибочные: в числителе первого ответа кубические метры, в знаменателе — квадратные метры, а в целом

результат измеряется в метрах — не получается нужная размерность; аналогично, в третьем ответе обнаруживается ошибка в знаменателе: из квадратных метров вычитаются метры линейные. И только второй ответ дает правильную размерность результата (это еще не означает, что ответ верный — и в нем есть ошибка, но первую проверку на правдоподобие он прошел).

Если в задаче не указаны линейные величины, не начинайте ее решение фразой «положим длину стороны равной единице», ибо если затем вы получите формулу, скажем, для высоты  $\cos^2 \varphi - \sin \beta$ , вы ничего не сможете сказать о ее правдоподобии. Если же решение начато фразой «положим длину стороны равной  $l$ », то полученная где-то в середине решения формула для высоты  $l^2 \cos^2 \varphi - l \sin \beta$  неправдоподобна из-за ошибочной размерности; а формула  $l \cos^2 \varphi - l \sin \beta$  — правдоподобна.

Если в задаче имеются числовые данные (например,  $AB = 4, PO = 5$ ), придайте им единицы измерения и в уравнениях пишите эти размеры вместе с единицами измерения. Правдоподобие уравнения

$$4^2 - 5 \cos \varphi = x^2,$$

где  $x$  — длина чего-то, проверить невозможно, а правдоподобие уравнения

$$(4m)^2 - 5m \cdot \cos \varphi = (xm)^2$$

проверяемо, и очевидна ошибка.

Вторая проверка — это *контроль симметрии*.

**Пример 2.** Дан трехгранный угол с плоскими углами  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ . Определите двугранные углы.

Предположим, что для угла  $\varphi$ , лежащего против плоского угла  $\gamma$ , получена формула

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \sin \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Верна ли она? Посмотрим, что произойдет, если на рисунке 1 мы поменяем местами обозначения углов  $\alpha$  и  $\beta$ . Угол  $\varphi$  от этого измениться не должен; однако  $\frac{\cos \alpha - \cos \beta \sin \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$  и  $\frac{\cos \beta - \cos \alpha \sin \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}$  это не одно и то же. Следовательно, ответ ошибочен. В данном случае угол  $\gamma$ , против которого находится вычисляемый угол, играет особую роль, а углы  $\alpha$  и  $\beta$  входят в условие симметрично; значит, и ответ должен быть симметричен относительно  $\alpha$  и  $\beta$ .

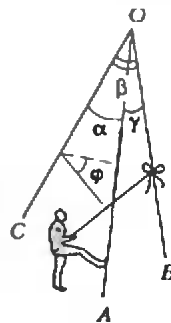


Рис. 1

Перейдем теперь к более тонким приемам контроля.

Пусть в примере 2 мы получили формулу

$$\cos \varphi = \frac{\sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Проверки на размерность и симметрию не дают никаких тревожных сигналов, но ...

Будем мысленно сдвигать плоскости  $OAC$  и  $OBC$ , поворачивая их вокруг прямой  $OC$  и притягивая друг к другу лучи  $OA$  и  $OB$  (см. рис. 1). Так как лучи  $OA$  и  $OB$  сближаются, углы  $\alpha$  и  $\beta$  по своей величине будут приближаться друг к другу, а угол  $\gamma$  будет стремиться к нулю. А так как плоскости  $OAC$  и  $OBC$  приближаются друг к другу, угол  $\varphi$  будет стремиться к нулю. Когда притягивание завершится, мы получим вырожденный трехгранный угол, у которого  $\alpha = \beta$ , а  $\varphi = \gamma = 0$ . Подставляя в формулу  $\alpha = \beta$  и  $\varphi = \gamma = 0$ , мы получим «тождество»  $1 = -1$ . Значит, ошибка. Допустим, что мы исправили знак, и формула приобрела вид

$$\cos \varphi = \frac{\cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}$$

Сведение лучей  $OA$  и  $OB$  теперь не покажет нам ошибки. Однако рассмотрим простейший частный случай: все плоские углы равны  $90^\circ$ ; значит, все двугранные углы также равны  $90^\circ$ . А наша формула для таких углов приводит к делению на нуль! Значит, опять ошибка. Правильный ответ

$$\cos \varphi = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}$$

Последние два приема контроля — это проверка частных и предельных случаев: результат проверяется на нескольких случаях, которые легко «просчитываются вручную». При этом необходимо проверить несколько случаев, так как проверка только одного случая может не показать ошибки (обычно бывает достаточно рассмотреть два-три случая).

Чтобы оценить достоинства контроля на частных и предельных случаях, рассмотрим еще пример.

**Пример 3.** В треугольной пирамиде  $OABC$  площадь основания равна  $q$ , площадь грани  $OBC$  равна  $p$ , высота пирамиды, опущенная из вершины  $O$ , попадает в точку пересечения медиан основания. Найдите площадь сечения, проведенного через точку  $O$  и середины сторон  $AB$  и  $AC$ .

Получен ответ

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{4p^2 - q^2}$$

С размерностью все в порядке, симметрии в задаче нет. Как его проверить? Будем «раздвигать» точки  $B$  и  $C$  так, чтобы не двигалась медиана, а следовательно, и точка пересечения медиан (рис. 2, а). Что произойдет, если отрезок  $BC$  увеличится в 2 раза? Все рассматриваемые площади увеличатся в 2 раза, так как высоты остаются без изменения. То же самое показывает и формула — все в порядке.

Теперь «надавим» на точку  $O$  вниз и «дождем» ее до плоскости  $ABC$ : грани пирамиды «лягут» на основание так, как показано на рисунке 2, б. В этом случае значения  $p$  и  $q$  уже не могут быть любыми: чтобы высота такой вырожденной пирамиды попала в точку пересечения медиан, должно быть  $p = \frac{1}{3}q$ . Из рисунка 2, б видно, что в этом случае  $S = \frac{1}{4}p$ ; наша формула подтверждает и это.

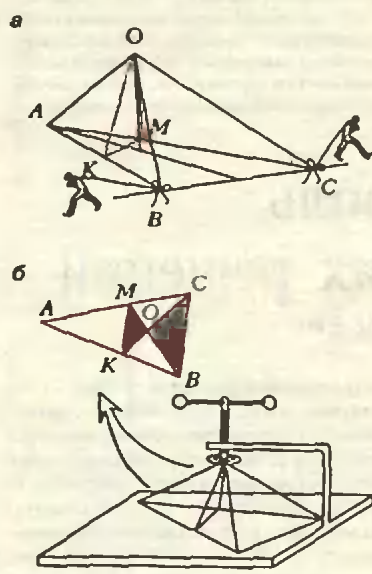


Рис. 2

Наконец, попробуем «утащить» точку  $O$  вверх. При этом площадь сечения будет возрастать, становясь приблизительно равной половине площади грани  $OBC$ . Однако она будет всегда меньше этой половины (высота сечения всегда меньше высоты грани). Наша формула при  $p \gg q$  дает именно такой результат. Заметим, что последний «частный» случай дал нам приблизительный ответ, который тем не менее оказался весьма полезным: мы могли бы «поймать» ошибку в знаке перед  $q^2$  и в коэффициенте перед  $p^2$ ; правда не смогли бы увидеть ошибку в коэффициенте перед  $q^2$ .

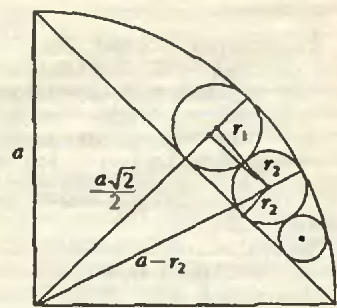


Рис. 3

Главный же совет, решая геометрическую задачу, не забывайте о «здоровом смысле». Посмотрите, например на рисунок 3. На нем показаны две касающиеся окружности, вписанные в сегмент четверти круга. Очевидно, что  $r_1 = a(1 - 1/\sqrt{2})/2$ . Радиус  $r_2$  определяется из уравнения

$$(a - r_2)^2 - (a\sqrt{2}/2 + r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2$$

Пусть, решая его, мы нашли  $r_2 = a/4\sqrt{2}$ . Правдоподобно ли это? Прикинем приблизительно:

$$(1 - 1/\sqrt{2})/2 = 0,15, \quad 1/4\sqrt{2} = 0,17,$$

т.е. у нас получилось, что  $r_2 > r_1$ . Но совершенно ясно, что  $r_1 > r_2$ . Значит, мы допустили ошибку.

И наконец, обнаружив, что ошибка есть, как найти место, где она «сидит»? Надо взять промежуточную формулу из середины решения и проверить ее, используя те же соображения, которые выявили ошибочность ответа (например, тот же самый частный случай). Если окажется, что все в порядке — ошибка вкралась где-то позже; если нет — раньше. Повторяем процедуру. Обычно такой «метод последовательных приближений» позволяет изловить ошибку за два-три шага. И исправьте ее прежде, чем это сделает экзаменатор.

## НАМ ПИШУТ

### Математические неожиданности

Справедливо следующее приближенное равенство:

$$\left(\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n - \left(\sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n = \left(\sqrt{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n + \left(\sqrt{\pi} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^n$$

С какой точностью выполняется это равенство?

И. Лариков

# Задачи LVIII Московской математической олимпиады

## 6 класс

1. После того, как Наташа съела половину персиков из банки, уровень компота понизился на одну треть. На какую часть (от установившегося нового уровня) понизится уровень компота, если съесть половину оставшихся персиков?

*Д. Ботин*

2. Разрежьте изображенную на рисунке 1 фигуру на две одинаковые части.

*А. Ковальджи*

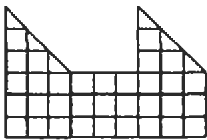


Рис. 1



Рис. 2

3. Изображенный на рисунке 2 прямоугольник составлен из шести квадратов. Во сколько раз сторона самого большого квадрата длиннее стороны самого маленького?

*И. Шарыгин*

4. Замените разные буквы разными цифрами, одинаковые — одинаковыми, а

$$\begin{array}{r} \times 1995 \\ \dots \\ \dots \\ + \text{ГОД} \\ \hline \text{СВИНЬИ} \end{array}$$

звездочки — любыми цифрами так, чтобы получился правильный пример на умножение.

*Е. Пронина*

5. В поединке любых двух из девяти борцов разной силы всегда побеждает сильнейший. Можно ли разбить их по трое на три команды так, чтобы во встречах команд по системе «каждый с каждым» по числу побед первая команда одержала верх над второй, вторая — над третьей, а третья — над первой?

*И. Шарыгин*

6. В квадрате размерами  $6 \times 6$  клеток некоторые клетки окрасили в черный цвет так, что из любой черной клетки можно пройти в любую другую черную клетку, переходя только через общие стороны черных клеток. Может ли среди черных клеток быть а) 10, б) 12 клеток, которые имеют общую сторону ровно с одной черной клеткой?

*В. Ковальджи*

## 7 класс

1. Натуральное число умножили на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

*Ф. Рамош*

2. Один сапфир и два топаза ценней, чем изумруд, в три раза. А семь сапфиров и топаз его ценнее в восемь раз. Определите мы просим вас, Сапфир ценнее или топаз?

*Д. Ботин*

3. Фигура на рисунке 3 составлена из квадратов. Найдите сторону левого ниж-



Рис. 3

него, если сторона самого маленького равна 1.

*И. Шарыгин*

4. Расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство:

$$1 - 2 \cdot 3 + 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 8 \cdot 9 = 1995$$

*И. Яценко*

5. Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и так далее. После одиннадцати таких вычитаний впервые получился ноль. С какого числа начинали?

*А. Спинак*

6. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 4, на две части, из которых можно сложить целый квадрат  $8 \times 8$ .

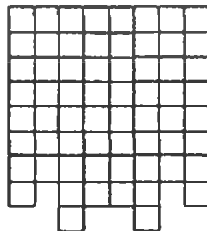


Рис. 4

## 8 класс

1. М.В. Ломоносов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли

на 20%, на ту же денежку он приобретал поллѐба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены еще раз вырастут на 20%?

*В. Ковальджи*

2. Докажите, что все числа вида 10017, 100117, 1001117, ... делятся на 53.

*А. Галочкин*

3. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$  и точка  $O$  внутри него. Известно, что  $\angle AOB = \angle COD = 120^\circ$ ,  $AO = OB$  и  $CO = OD$ . Пусть  $K$ ,  $L$  и  $M$  — середины отрезков  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  соответственно. Докажите, что а)  $KL = LM$ ; б) треугольник  $KLM$  — правильный.

*С. Маркелов*

4. Достаточно ли для изготовления закрытой со всех сторон прямоугольной коробки, вмещающей не менее 1995 единичных кубиков, а) 962, б) 960; в) 958 квадратных единиц материала?

*Д. Ботин*

5. Несколько населенных пунктов соединены дорогами с городом, а между ними дорог нет. Автомобиль отправляется из города с грузами сразу для всех населенных пунктов. Стоимость каждой поездки равна произведению массы всех грузов в кузове на расстояние. Докажите, что если масса каждого груза численно равна расстоянию от города до пункта назначения, то общая стоимость перевозки не зависит от порядка, в котором объезжаются пункты.

*В. Ковальджи*

6. Прямая отсекает от правильного шестиугольника  $ABCDEF$  треугольник  $AKN$  так, что  $AK + AN = AB$ . Найдите сумму углов, под которыми отрезок  $KN$  виден из вершин шестиугольника

$$(\angle KAN + \angle KBN + \angle KCN + \angle KDN + \angle KEN + \angle KFN).$$

*В. Прохоров*

## 9 класс

1. Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

*А. Галочкин*

2. Дан равносторонний треугольник  $ABC$ . Для произвольной точки  $P$  внутри треугольника рассмотрим точки  $A'$  и  $C'$  пересечения прямых  $AP$  с  $BC$  и  $CP$  с  $BA$

соответственно. Найдите геометрическое место точек  $P$ , для которых отрезки  $AA'$  и  $CC'$  равны.

*С. Маркелов*

3. Прямоугольник размерами  $1 \times k$  при всяком натуральном  $k$  будем называть полоской. При каких натуральных  $n$  прямоугольник размерами  $1995 \times n$  можно разрезать на попарно различные полоски?

*Ю. Чеканов*

4. Натуральные числа  $a, b, c, d$  таковы, что  $ab=cd$ . Может ли число  $a+b+c+d$  быть простым?

5. Первоначально даны четыре одинаковых прямоугольных треугольника. Каждым ходом один из имеющихся треугольников разрезается по высоте (выходящей из прямого угла) на два других. Докажите, что после любого количества ходов среди треугольников найдутся два одинаковых.

*А. Шаповалов*

6. См. задачу M1508 из «Задачника «Кванта»».

### 10 класс

1. Известно число  $\sin \alpha$ . Какое наибольшее число значений может принимать а)  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , б)  $\sin \frac{\alpha}{3}$ ?

*С. Маркелов*

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Диагонали трапеции  $ABCD$  пересекаются в точке  $K$ . На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Точка  $K$  лежит вне этих окружностей. Докажите, что длины касательных, проведенных к этим окружностям из точки  $K$ , равны.

*С. Маркелов*

4. См. задачу 5 для 9 класса.

5. Целые числа  $a, b$  и  $c$  таковы, что числа  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$  и  $\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$  тоже целые. Докажите, что  $|a|=|b|=|c|$ .

*А. Грибалко*

6. На столе горит несколько лампочек. Имеется несколько кнопок. Нажатие на кнопку меняет состояние лампочек, с которыми она соединена. Известно, что для любого набора лампочек найдется кнопка, соединенная с нечетным числом лампочек из этого набора. Докажите, что нажимая на кнопки, можно погасить все лампочки.

*А. Белов*

### 11 класс

1. Докажите, что  $|x| + |y| + |z| \leq |x+y-z| + |x-y+z| + |x+y+z|$ , где  $x, y, z$  — действительные числа.

*А. Галочкин*

2. Можно ли ребра  $n$ -угольной призмы раскрасить в 3 цвета так, чтобы на каждой грани были все 3 цвета и в каждой вершине сходились ребра разных цветов, если а)  $n = 1995$ ; б)  $n = 1996$ ?

*А. Галочкин*

3. В треугольнике  $ABC$   $AA_1$  — медиана,  $AA_2$  — биссектриса,  $K$  — такая точка на  $AA_1$ , что  $KA_2 \parallel AC$ . Докажите, что  $AA_2 \perp KC$ .

*И. Шарыгин*

4. Разрежьте отрезок  $[-1; 1]$  на черные и белые отрезки так, чтобы интегралы любой а) линейной функции, б) квадратного трехчлена по белым и черным отрезкам были равны.

*Г. Кондаков*

5°. Для какого наибольшего  $n$  можно придумать две бесконечные в обе стороны последовательности  $A$  и  $B$  такие, что любой кусок последовательности  $B$  длиной не больше  $n$  содержится в  $A$ ,  $A$  имеет период 1995, а  $B$  этим свойством не обладает (непериодична или имеет период другой длины)?

*А. Белов*

6°. См. задачу M1510, б) из «Задачника «Кванта»».

7°. Существует ли такой многогранник и точка вне его, что из этой точки не видно ни одной из его вершин?

*А. Белов*

## Избранные задачи Московской физической олимпиады

### 9 класс

1. На дне бассейна лежит тонкий стержень длиной  $L = 1$  м, состоящий из двух половин плотностью  $\rho_1 = 0,5$  г/см<sup>3</sup> и  $\rho_2 = 2,5$  г/см<sup>3</sup>. В бассейн наливают воду. При какой глубине воды в бассейне стержень будет составлять с поверхностью воды угол  $\alpha = 45^\circ$ ?

*Г. Пустовалов*

2. Лебедь, рак и щука тянут телегу. Скорость лебедя в два раза больше скорости щуки, скорость рака в два раза меньше скорости щуки. В некоторый момент времени веревки, связывающие телегу с каждым из животных, лежат в горизонтальной плоскости и направлены так же, как и скорости соответствующих животных, причем угол между скоростью лебедя и щуки равен  $\alpha$ . Как при этом должна быть направлена скорость рака?

*А. Селиверстов*

### 10 класс

1. Проводящий шар радиусом  $R = 1$  м заряжен до потенциала  $\varphi_1 = 1000$  В. Шара касаются, прикладывая плашмя к его поверхности тонкий незаряженный проводящий диск радиусом  $r = 1$  см, укрепленный на изолирующей рукоятке. Затем диск уносят на большое расстояние и разряжают. Сколько раз нужно таким образом коснуться шара, чтобы его потенциал стал равен  $\varphi_2 = 999$  В?

*Г. Пустовалов*

2. На боковой поверхности длинного цилиндра массой  $M$  и радиусом  $R$  равномерно распределены  $N$  маленьких крючков (как на застежке «линучке»). Цилиндр кладут на наклонную плоскость, образующую угол  $\alpha$  с горизонтом, так, что его ось горизонтальна (рис. 1). Поверхность плоскости покрыта такими же, как на «линучке», петлями. Каждый

крючок, коснувшийся поверхности, цепляется за петлю, причем энергия его

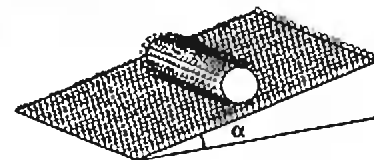


Рис. 1

отрыва от петли равна  $A$ . При каком соотношении между  $R, M, N$  и  $A$  цилиндр будет скатываться с плоскости?

*А. Кульгин*

3. Идеальный одноатомный газ совершает работу в квазистатическом процессе 1—2, который изображается на  $pV$ -диаграмме полуокружностью (рис. 2). Найдите суммарное количество теплоты, полученное и отданное газом в ходе

11 класс

1. Оцените частоту собственных колебаний капли воды радиусом  $r = 2$  мм, находящейся в невесомости. Плотность воды  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup>, коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 0,07$  Н/м.  
*К. Бедов*

2. На невесомую нерастяжимую нить длиной  $2l$ , концы которой закреплены на одной высоте, надета гайка. Под тяжестью гайки нить провисает на величину  $h$  (рис.4). Найдите период малых

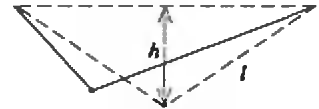


Рис. 4

колебаний гайки вдоль нити. Трение гайки о нить отсутствует.

*А. Андрианов*

3. Жесткий невесомый стержень шарнирно подвешен за один из концов к потолку. К свободному концу и к середине стержня прикреплены два одинаковых маленьких тяжелых шарика. Стержень вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через точку подвеса, образуя с ней угол  $\alpha$ . Найдите угол между вертикалью и силой, с которой верхний шарик действует на стержень.

*А. Якута*

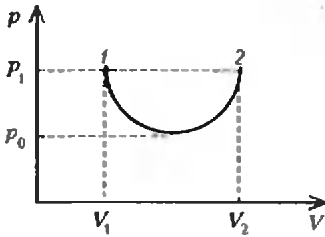


Рис. 2

этого процесса. Значения  $V_1, V_2, p_0, p_1$  считать известными.

*А. Якута*

4. Через вращающийся с постоянной угловой скоростью шероховатый шкив переброшена нерастяжимая веревка, к концам которой подвешены два груза. В начальный момент времени скорости грузов равны нулю, а первый груз имеет ускорение, равное  $a_1$  и направленное вверх. Если изменить направление вращения шкива, то при нулевой начальной скорости второй груз будет иметь ускорение, равное  $a_2$  и направленное вверх. Найдите отношение масс грузов.

*С. Варламов*

5. Мадьяк, управляя кордовой моделью самолета массой  $m$ , перемещает конец кордов длиной  $L$  в горизонтальной плоскости по окружности радиусом  $r$ . Самолет летит по окружности радиусом  $R > r$  на высоте  $h$  над плоскостью движения руки с постоянной скоростью  $v$ . Центры обеих окружностей лежат на

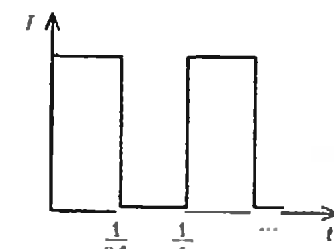


Рис. 3

одной вертикали. Ось самолета направлена горизонтально по касательной к его траектории, плоскость крыльев также горизонтальна. Определите подъемную силу, действующую на модель.

*В. Погояев*

6. В стеклянную кювету, две противоположные стенки которой покрыты слоем меди, налит водный раствор медного купороса ( $\text{CuSO}_4$ ) с удельным сопротивлением  $\rho$ . Высота слоя электролита  $h$ , ширина проводящих стенок кюветы  $b$ , расстояние между ними  $L$ . Кювету подключают к источнику тока частотой  $f = 100$  Гц. Закон изменения тока показан на рисунке 3. Найдите изменение температуры электролита за время  $t \gg 1/f$  после подключения, если масса катода кюветы за это время увеличилась на  $m$ . Теплоемкость электролита  $C$ , атомная масса меди  $A$ . Считать, что все Джоулево тепло идет на нагревание электролита.

*В. Погояев*

НАМ ПИШУТ

НА ВОДЕ ВЕСЛОМ НАПИСАНО

Если, катаясь на лодке, отвлечься от красок окружающей природы, можно увидеть много интересного, наблюдая за поведением воды в результате действий веслами.

В первую очередь — это вихревая трубка, появляющаяся в воде после каждого гребка (рис.1,а). Увидеть ее не представляет особой сложности благодаря большому количеству мелких пузырьков воздуха, образуемых в воде при завершении гребка веслом. Концы вихревой трубки выходят на поверхность и

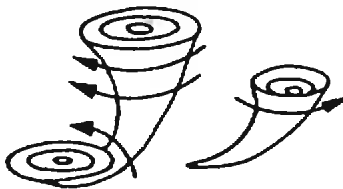


Рис. 1

видны в виде воронок, расстояние между которыми примерно равно длине лопасти весла. Образование такой трубки обусловлено возникновением циркуляционных течений вокруг краев лопасти весла в процессе гребка.

При плавании на надувной лодке, где весла не имеют определенной ориентации, можно иногда заметить между двумя основными воронками третью (рис.1,б). Ее появление связано с процессом погружения весла в воду. Если энергично опускать весло в воду так, чтобы плоскость лопасти была перпендикулярна направлению ее движения, можно получить отдельно эту самую третью воронку — ее образуют сходящиеся потоки воды, увлекаемые веслом вглубь. Длина воронки в отдельных случаях достигает 30 см.

Но самое удивительное свойство этих воронок в том, что и правое, и левое весло формируют воронки, вращающиеся в одну и ту же сторону — против часовой стрелки (рис.2). Поскольку

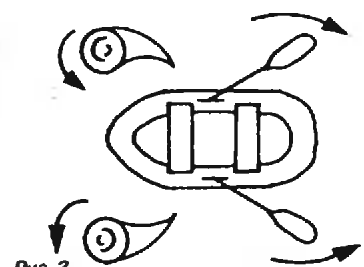


Рис. 2

лопасть весла, кроме поступательного движения, имеет еще и вращательное вокруг уключины, из соображений симметрии можно было бы ожидать появления воронок, вращающихся в противоположных направлениях. Однако никакими ухищрениями, даже вращаясь на лодке на одном месте, нам так и не удалось получить воронку, закрученную по часовой стрелке.

Может быть, вам повезет больше? Или вы сумеете объяснить этот факт?

*Ю. Филиппов*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## Размышления физика-альпиниста

1.  $\Phi = 1,2$ . 2.  $F = 9600$  Н. 3.  $\frac{a}{g} = \frac{F - mg}{mg} = 11$ . 4.  $\Delta t = 2,4$  м;  
 $\frac{\Delta t}{T} 100\% = 24\%$ . 5.  $F = 2mg = 1600$  Н.

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### Задачи

(см. «Квант» № 3)

1. Заметим, что числа, равные  $k$ , стоят на местах с  $\frac{k(k-1)}{2} + 1$  по  $\frac{k(k+1)}{2}$ . Значит,  $\frac{k(k-1)}{2} + 1 \leq 1995 \leq \frac{k(k+1)}{2}$ , или  $k^2 - k + 2 \leq k^2 + k$ . Отсюда легко получаем, что  $k = 63$ .  
 2. КВАНТ = 12375, ЛЕТ = 495. 3. См. рис. 1.

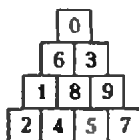


Рис. 1

4. Существует четыре различных способа разрезания треугольника на три меньших треугольника. Они указаны на рисунке 2. Теперь заметим, что смежные углы у равных треугольников могут быть только прямыми, поэтому углы, отмеченные на рисунках 2, а — в, — прямые. Но отсюда получаем, что случаи 2, а и 2, б невозможны, а случай 2, в соответствует треугольнику с углами  $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ . В случае 2, г очевидно, что все углы в точке  $O$  равны по  $120^\circ$ , а отрезки, соединяющие эту точку с вершинами, равны. Поэтому треугольник правильный.

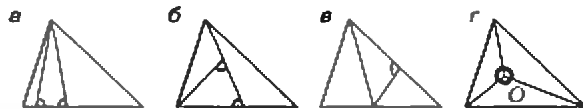


Рис. 2

Итак, указанное в задаче разрезание возможно лишь для двух треугольников — правильного и прямоугольного с углом  $30^\circ$ .  
 5. Наибольшая сумма равна 72, а наименьшая равна 36. Соответствующие расположения изображены на рисунках 3, а и б.

1	11	6
4	5	9
3	8	7
16	0	2

8	-2	3
5	4	0
6	1	2
-7	9	7

Рис. 3

## Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» № 1)

11. Обозначим исконое число через  $x$ , а его делители через  $a = \frac{x}{n}$  и  $b = \frac{x}{m}$ . Будем считать, что  $a < b$ , а следовательно,  $n > m$ .

По условию задачи,  $x = 2(a+b)$ , или  $x = 2\left(\frac{x}{n} + \frac{x}{m}\right)$ . Отсюда  $1 = \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$ , поэтому  $nm = 2n + 2m$ , или  $(n-2)(m-2) = 4$ . Так как числа  $n$  и  $m$  натуральные и  $n > m$ , то  $n = 6$ ,  $m = 3$ , откуда  $x = 6a = 3b$ . Следовательно, искомыми являются числа вида  $6a$ , равные удвоенной сумме своих делителей  $a$  и  $2a$ .

12. Такая возможность имеется. Пример такого расположения указан на рисунке 4.

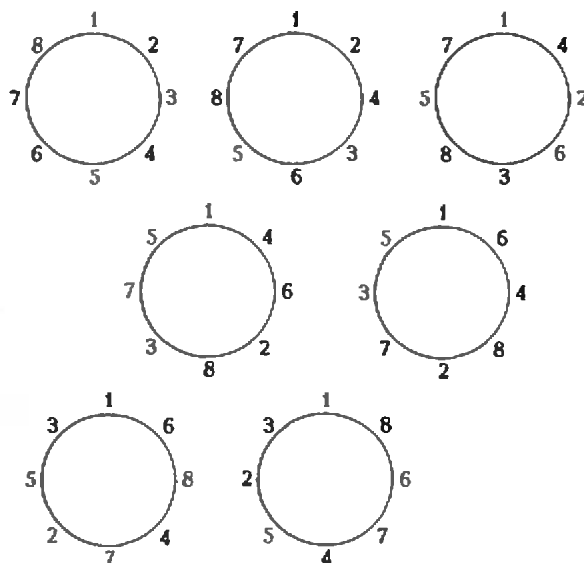


Рис. 4

13. Заметим, что если какие-нибудь две из данных окружностей имеют единственную общую точку, то через эту точку, согласно условию, обязаны проходить и все остальные окружности. В этом случае утверждение задачи очевидно.

Пусть любые две окружности из данных имеют две точки пересечения. Выберем две окружности  $O_1$  и  $O_2$  и обозначим точки их пересечения через  $A$  и  $B$ . По условию задачи, каждая из оставшихся окружностей должна проходить по крайней мере через одну из этих точек. Если все они проходят через точку  $A$  (или точку  $B$ ), то утверждение задачи выполняется.

Пусть окружность  $O_3$  проходит через точку  $A$ , но не проходит через точку  $B$ , а окружность  $O_4$  проходит через точку  $B$ , но не проходит через точку  $A$ . Одна из точек пересечения этих окружностей (обозначим ее  $C$ ) должна лежать на окружности  $O_1$ , чтобы окружности  $O_1, O_3$  и  $O_4$  имели общую точку, а вторая — на окружности  $O_2$ , чтобы окружности  $O_2, O_3$  и  $O_4$  имели общую точку, которую обозначим через  $D$ .

Осталось заметить, что любая пара точек из отмеченных точек  $A, B, C$  и  $D$  является парой точек пересечения каких-нибудь двух из четырех выбранных нами окружностей, а любые три лежат на одной из них, поэтому любая пятая окружность не может содержать более двух из этих точек, а с другой стороны, должна содержать по крайней мере одну точку каждой пары этих точек, что невозможно.

14. Имеет место тождество

$$(n-3)(n-1)(n+1)(n+3) + 16 = (n^2 - 5)^2.$$

Из этого тождества при  $n = 1994$  вытекает утверждение задачи.

15. Обозначим радиус левой окружности через  $R$ , а правой через  $r$ . Проведем радиусы окружностей в точки касания прямых к линии центров этих окружностей. Расстояния от точек  $A_2$  и  $B_2$  до линии центров обозначим через  $x$  и  $y$ . Из подобия образованных двух пар прямоугольных треугольников (рис. 5)

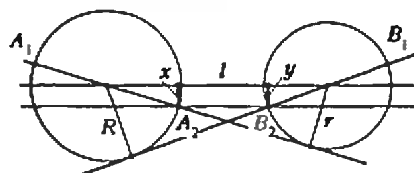


Рис. 5

получаем  $\frac{l}{r} = \frac{R}{x}$  и  $\frac{l}{R} = \frac{r}{y}$ , откуда  $x = y = \frac{rR}{l}$ . Следовательно, прямая  $A_1B_1$  параллельна линии центров. Аналогично показывается, что прямая  $A_2B_2$  также параллельна линии центров. Значит, эти прямые параллельны между собой.

**«И вспышки молний тьма глотала,  
И небо долго грохотало...»**

1. Если предположить, что Конек-Горбунок скакал 10 часов, а верста примерно равна километру, то средняя скорость составляет около 2,8 км/с. «На первый вечер» Конек-Горбунок сумел бы обогнуть земной шар 2,5 раза.
2. Это — диффузия.
3. Запах лука вызывает слезы у человека. Чем больше поверхность, с которой испаряется луковый сок, тем интенсивнее испарение и сильнее действие.
4. Одна из причин та, что масло и уксус — несмачивающие друг друга жидкости.
5. Для обеспечения хорошего смачивания краской поверхности.
6. Продолжительность грома зависит от пути молнии в атмосфере. Чем извилистее путь, тем длительнее звук, так как он исходит от различных частей канала молнии. Кроме того, молния может состоять из нескольких отдельных вспышек, каждая из которых порождает свой звук. Наконец, надо учесть отраженные звуки от строений, земли и т.п.
7. Для образования грозовых облаков необходима быстрая вертикальная конвекция влажного воздуха. Как правило, зимой условий для этого нет.
8. Дуб имеет корни, глубоко уходящие в почву.
- 9, 10. Это — коронный электрический разряд, или пробой воздуха. Он возникает у острия, вышки, мачты, проволоки и вообще вблизи всех электродов, возле которых образуется очень сильное неоднородное электрическое поле. Разряд сопровождается слабым свечением в форме короны, а также шипящим звуком и потрескиванием.
11. Невозможно, поскольку это противоречит физическим законам. В частности — закону сохранения импульса. Внутренние силы изолированной системы не могут привести в движение ее центр тяжести. При бросании магнита вверх железный круг получает равный по величине и противоположный по направлению импульс вниз.
12. Минимые, прямые, уменьшенные.
13. Можно. Например, с самолета или воздушного шара.
14. Наиболее совершенной маскировкой является такая окраска, у которой коэффициент отражения для всех длин волн имеет те же значения, что и у окружающего фона. Обычно защитная окраска имеет близкий к фону коэффициент отражения для желто-зеленой части спектра — к ней глаз наиболее чувствителен и она интенсивнее других представлена в солнечном свете. А вот на фотографическую пластинку особенно сильно действуют фиолетовые и ультрафиолетовые лучи, для которых коэффициент отражения у объекта и фона заметно отличаются друг от друга.
15. В естественном свете относительная доля желтых лучей гораздо больше, чем в искусственном. Поэтому желтые цветы при вечернем освещении кажутся более тусклыми, чем днем. (То же относится и к предметам, окрашенным в зеленый и синий цвета.)
16. Явление объясняется дифракцией света на мелких каплях воды.
17. Синяя дымка вдали (как и синева неба) обусловлена рассеянием молекулами воздуха голубой части спектра солнечного света.

**Геометрическое место точек**

1. Искомое множество точек состоит из трех отрезков  $A_1A_2$ ,  $B_1B_2$  и  $C_1C_2$ , изображенных на рисунке 6.
2. Середина четвертой стороны должна быть четвертой вершиной параллелограмма, три вершины которого — заданные точки

$K$ ,  $L$  и  $N$ . Это точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$  на рисунке 7. Вершины четырехугольника будут располагаться внутри областей, заштрихованных на этом рисунке.

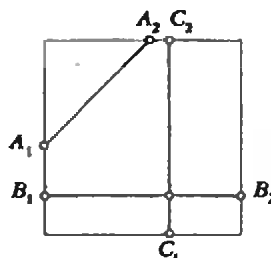


Рис. 6

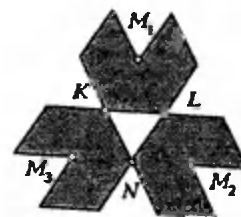


Рис. 7

3. Искомое множество точек состоит из четырех дуг окружностей, которые являются окружностями, из которых отрезки  $AC$  и

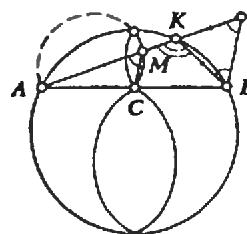


Рис. 8

$CB$  видны под углами вдвое меньшими углов  $AKB$ , что видно из рисунка 8. Эти окружности проходят через точку  $C$  — середину отрезка  $AB$ , одну из точек  $A$  или  $B$  и одну из середин дуг  $AB$ .

**Геометрическая оптика**

1.  $x = F/2$ . 2.  $\Gamma = 2$ . 3.  $F_1 = \frac{-ab\Gamma}{c - a\Gamma(a+b)} = -\frac{12}{7}$  см;  
 $F_2 = \frac{bc}{b+c-a\Gamma} = \frac{48}{25}$  см.

**Задачи LVIII Московской математической олимпиады**

**6 класс**

1. На четверть.
2. См. рис. 9.
3. В семь раз. Пусть длина стороны самого большого квадрата равна  $x$ , а самого маленького — 1. Тогда длины сторон других квадратов равны  $x-1$ ,  $x-2$ ,  $x-3$  и  $x-3$ . Из равенства верхней и нижней стороны прямоугольника получаем:  $x + (x-1) = (x-2) + (x-3) + (x-3)$ , или  $2x - 1 = 3x - 8$ , откуда  $x = 7$ .

4.

$$\begin{array}{r} 1995 \\ \times 308 \\ \hline 11970 \\ 5985 \\ \hline 610470 \end{array}$$

Средняя цифра множителя \* \* \* должна быть нулем. Выпишем произведения 1995 на все числа от 1 до 9: 1995, 3990, 5985, 7980, 9975, 11970, 13965, 15960, 17955. Только первые пять из них — четырехзначные числа. На роль числа \*ГОД, у которого все три последние цифры различны, числа 1995 и 3990 претендовать не могут. У оставшихся трех чисел в разряде сотен стоит 9. Итак,  $\Gamma = 9$ .  
 Если бы \*ГОД=9975, результат умножения был бы не шестизначным, а семизначным. Следовательно, \*ГОД=5985 или 7980, откуда  $O = 8$ .

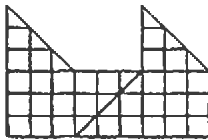


Рис. 9

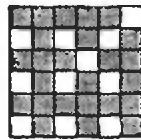


Рис. 10

Кроме того, поскольку 1995 оканчивается пятеркой, одна из цифр И и Д равна 0, а другая 5. Осталось разобрать совсем немного случаев — и обнаружится, что ответ единственный.

5. Можно. Пронумеруем бойцов в соответствии с их силой числами от 1 до 9. Разбив их на группы {1,2,3}, {4,5,6}, {7,8,9} и направив в каждую команду по представителю от каждой из этих групп, получим среди возможных вариантов и такой: {1,5,9}, {2,6,7}, {3,4,8} — проверьте, что он дает искомый результат.
6. См. рис. 10.

**7 класс**

1.  $57 \cdot 5 - 7 = 1995$ . 2. Одинаково. 3. 4.
4.  $(1-2) \cdot 3 + (4+5 \cdot 6 \cdot 7+8) \cdot 9 = 1995$ .
5. Либое число от 100 до 109. Разность между числом и суммой его цифр всегда делится на 9. Поэтому все числа, кроме, возможно, исходного, должны делиться на 9. Получаем цепочку:  $0 \leftarrow 9 \leftarrow 18 \leftarrow 27 \leftarrow 36 \leftarrow 45 \leftarrow 54 \leftarrow 63 \leftarrow 72 \leftarrow 81$ .

Число 81 можно получить и из 90, и из 99. Но 90 ни из какого числа не получишь. А 99 получается из 100, из 101, ..., из 109.

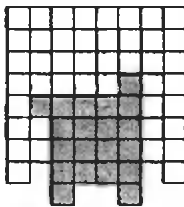


Рис. 11

6. См. рис. 11.

**8 класс**

1. Хватит. Сначала  $\text{денежка} = \text{хлеб} + \text{квас}$ , а после повышения цен  $\text{денежка} = (\text{полхлеба} + \text{квас}) \cdot 1,2$ .

Из этих уравнений получаем, что  $2 \text{ хлеба} = \text{квасу}$ .

Выразим денежку через квас:  $1 \text{ денежка} = 1,5 \text{ кваса}$ .

Стоимость кваса после второго повышения цен квас  $\cdot 1,2 \cdot 1,2 = 1,44$  кваса.

2. Заметим, что разность двух соседних чисел  $1001 \dots 17 - 1001 \dots 17 = 9010 \dots 0$

делится на 53 и первое число, 10017, делится на 53. Отсюда следует, что все наши числа делятся на 53.

3. Пусть N и P — середины BO и CO соответственно. Тогда треугольники KNL и LPM равны, так как  $KN = AO/2 = BO/2 = LP$ ,  $LN = CO/2 = DO/2 = MP$  и  $\angle KNL = \angle LOC = 120^\circ + \angle BOC = \angle BOD = \angle LPM$  (рис. 12). Поэтому  $KL = LM$ . Кроме того,  $\angle KLM = \angle KLN + \angle NLP + \angle PLM = \angle KLN + \angle BNI + \angle NKL = 180^\circ - \angle BNK = 60^\circ$ .

Итак, в треугольнике KLM равны стороны KL и LM, а кроме того  $\angle KLM = 60^\circ$ , откуда этот треугольник — правильный.

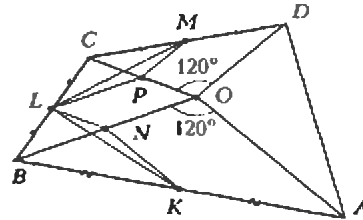


Рис. 12

4. Достаточно в каждом из трех случаев. Объем коробки размерами  $11 \times 13 \times 14$  равен 2002, т.е. достаточен; а общая площадь ее стенок равна  $2 \cdot (11 \cdot 13 + 11 \cdot 14 + 13 \cdot 14) = 958$ .
5. Достаточно доказать, что от перестановки двух последовательных маршрутов стоимость перевозки не изменится, поскольку такими перестановками можно добиться любого порядка следования маршрутов. Пусть автомобиль посетил после пункта M пункт N и привез грузы m и n. Для всех остальных грузов перестановка поездок в M и N не меняет стоимости перевозки, а для грузов m и n стоимость перевозки в первом случае  $(m+n)m + n \cdot m + n^2$ , во втором случае  $(m+n)n + m \cdot n + m^2$ . Раскрывая скобки, убеждаемся, что стоимость не изменилась.
6. Решение этой задачи (частный случай задачи M1502 из «Задачника «Кванта»») будет опубликовано позже.

**9 класс**

1. Заметим, что

$$19 \cdot \underset{\text{дел}}{63} \cdot \underset{\text{дел}}{32} = 20 \cdot \underset{\text{дел}}{63} \cdot \underset{\text{дел}}{32} - \underset{\text{дел}}{63} \cdot \underset{\text{дел}}{32} = \underset{\text{дел}}{126} \cdot \underset{\text{дел}}{640} - \underset{\text{дел}}{63} \cdot \underset{\text{дел}}{32} = 120 \cdot \underset{\text{дел}}{3} \cdot \underset{\text{дел}}{308}$$

делится на 19 при любом натуральном n, что и требовалось доказать.

2. Выберем произвольную точку A' на BC и проведем отрезок AA'. Очевидно, что среди всех отрезков с началом в точке C и концом на стороне AB имеются только два, равных отрезку AA' — это отрезки CC' и CC'', где точки C' и C'' таковы, что  $BC' = BA'$  и  $AC'' = BA'$  (рис. 13). Точка пересечения AA' и CC' лежит на высоте треугольника ABC, выходящей из вершины B, и легко видеть, что все точки на этой высоте удовлетворяют условию задачи. Пусть P — точка пересечения AA' и CC''. Заметим, что треугольники ACC'' и BAA' равны, откуда  $\angle APC = 180^\circ - (\angle PAC + \angle PCA) = 180^\circ - (\angle PAC + \angle PAC) = 180^\circ - 2 \cdot \angle PAC = 180^\circ - 2 \cdot \angle CAB = 120^\circ$  (см. рис. 13). Это значит, что точка P лежит на окружности  $\gamma$ , проходящей через точки A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. И наоборот, все точки дуги этой окружности, лежащей внутри треугольника ABC, удовлетворяют условию (подумайте, почему). Искомое множество точек изображено на рисунке 14.

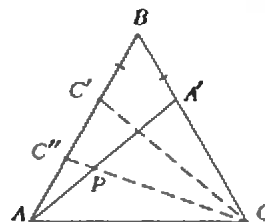


Рис. 13

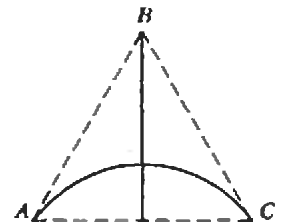


Рис. 14

3. При  $n \leq 1996/2$  и при  $n \geq 2 \cdot 1995 + 1$ . Ясно, что стороны полосок должны быть параллельны сторонам данного прямоугольника. Будем считать, что размеры прямоугольников даны в сантиметрах. Разберем два случая. Случай 1:  $n < 1995$ . Заметим что в этом случае длина максимальной полоски, уместяющейся в данном прямоугольнике, равна 1995 см. Но различными полосками длиной не больше 1995 см можно покрыть площадь не более чем



$1+2+\dots+1995=1995 \cdot 1996/2$  см<sup>2</sup>. Так как площадь данного прямоугольника равна  $1995 \cdot n$  см<sup>2</sup>, получаем, что  $1995 \cdot 1996/2 \geq 1995 \cdot n$ , откуда  $n \leq 1996/2$ . Легко построить пример разрезания при  $n \leq 1996/2$ : сначала разрежем прямоугольник на  $n$  полосок длинами по 1995 см, затем первую из них оставим нетронутой, вторую разрежем на две полоски длинами 1 см и 1994 см, третью — на две полоски длинами 2 см и 1993 см, и так далее.

Случай 2:  $n \geq 1995$ . Рассуждаем аналогично. В этом случае длина максимальной полоски, уместяющейся в прямоугольнике, равна  $n$  см. Так как различными полосками не длиннее  $n$  см можно покрыть не более чем  $n(n+1)/2$  см<sup>2</sup>, то  $n(n+1)/2 \geq 1995 \cdot n$ , откуда  $n \geq 2 \cdot 1995 + 1$ . Пример разрезания при таких  $n$  строится аналогично (разрезаем на 1995 полосок по  $n$  см, первую не трогаем, вторую разрезаем на две полоски длинами 1 см и  $n - 1$  см, и так далее).

4. Не может.

Первое решение. Так как  $ab = cd$ , то найдутся такие целые  $c_1, c_2, d_1, d_2$ , что  $c = c_1 c_2, d = d_1 d_2, a = c_1 d_1$  и  $b = c_2 d_2$  (мы пользуемся тем, что целые числа однозначно раскладываются на простые множители). Тогда  $a + b + c + d = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 = (c_1 + d_1)(d_1 + c_2)$  — составное число.

Второе решение. По условию  $a + b + c + d = a + b + c + ab/c = (a + c) \cdot (b + c)/c$  — целое число, откуда найдутся такие целые  $c_1, c_2$ , что  $c = c_1 c_2$ , причём  $(a + c)/c_1 = k$  и  $(b + c)/c_2 = l$  — целые. Так как  $a + c \geq c \geq c_1$  и  $b + c \geq c \geq c_2$ , то  $k > 1$  и  $l > 1$ , откуда  $a + b + c + d = kl$  — составное.

5. Пусть это не так. Рассмотрим такое наименьшее число  $n$ , что, сделав  $n$  разрезов, можно из некоторых четырех одинаковых прямоугольных треугольников получить попарно неравные треугольники. Будем считать, что нам даны именно эти треугольники.

Заметим для дальнейшего, что порядок, в котором разрезали треугольники, несважен (в том смысле, что конечный результат разрезов не зависит от порядка).

Поскольку первоначально имеется четыре одинаковых треугольника, три из них придется разрезать. Будем считать, что первыми делаются именно эти три разреза. В результате образуются две тройки одинаковых треугольников. В каждой из этих троек придется разрезать по два треугольника. Сделаем эти разрезы. После этого, как нетрудно видеть, у нас опять образуются четыре одинаковых треугольника. За оставшиеся  $n - 7$  разрезов мы должны их разрезать на попарно неравные. Но это противоречит минимальности  $n$ .

Значит, на любом ходе найдутся два одинаковых треугольника.

6. Решение этой задачи (задача M1508 из «Задачника «Кванта») будет опубликовано позже.

10 класс

1. а) 4. Пусть  $\sin \alpha = x$ . Все такие  $\alpha$  имеют вид  $(-1)^k \arcsin x + k\pi$ , где  $k$  — некоторое целое число. Значит,  $\frac{\alpha}{2}$  имеет вид  $\frac{(-1)^k \arcsin x}{2} + k\frac{\pi}{2}$ . Этим числам соответствуют 4 точки на окружности:  $\frac{\arcsin x}{2}, \frac{\arcsin x}{2} + \pi, \frac{\pi - \arcsin x}{2}, \frac{3\pi - \arcsin x}{2}$ . Значит,  $\sin \frac{\alpha}{2}$  не может принимать больше четырёх значений. Но  $\sin \frac{\alpha}{2}$  может принимать 4 значения, например:  $x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}$ .

б) 3. Аналогично п. а),  $\frac{\alpha}{3}$  имеет вид  $\frac{(-1)^k \arcsin x}{3} + k\frac{\pi}{3}$ , где  $k$  — целое. Этим числам соответствуют 6 точек на окружности:  $\frac{\arcsin x}{3}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\arcsin x}{3}, \frac{4\pi}{3} + \frac{\arcsin x}{3}, \frac{\pi - \arcsin x}{2}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi - \arcsin x}{3}, \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi - \arcsin x}{3}$ . По ясно, что синусы 1-й и 5-й точки совпадают. Ясно также, что синусы 2-й и 4-й, а так-

же 3-й и 6-й точек совпадают. Значит,  $\sin \frac{\alpha}{3}$  не может принимать больше трех значения. Но  $\sin \frac{\alpha}{3}$  может принимать три значения, например:  $x=0, \alpha=0, 2\pi, 4\pi$ .

2. См. решение задачи 2 для 9 класса.

3. Пусть боковые стороны трапеции —  $AB$  и  $CD$ . Обозначим через  $M$  и  $N$  точки пересечения прямых  $AC$  и  $BD$  соответственно с окружностями (рис. 15). По теореме о касательной и секущей, квадраты касательных к окружности, проведенных из точки  $K$ , равны  $KM \cdot KA$  и  $KN \cdot KD$ . Значит, нам надо доказать, что  $KM \cdot KA = KN \cdot KD$ .

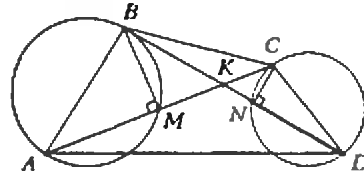


Рис. 15

Так как  $\angle AMB$  опирается на диаметр, получаем, что  $\angle AMB = 90^\circ$ . Значит,  $\angle BMC = 90^\circ$ . Аналогично,  $\angle BNC = 90^\circ$ , поэтому точки  $B, M, N$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $BC$ , откуда  $\angle CMN = \angle CBN = \angle BDA$  (так как  $BC \parallel AD$ ). Но тогда  $\angle AMN + \angle NDA = 180^\circ$ , поэтому точки  $A, M, N, D$  лежат на одной окружности, и по теореме о произведении всей секущей на ее внешнюю часть  $KM \cdot KA = KN \cdot KD$ , что и требовалось.

4. См. решение задачи 5 для 9 класса.

5. Решение этой задачи (часть задачи M1504 из «Задачника «Кванта») будет опубликовано позже.

6. Заметим сначала, что результат не зависит от последовательности нажатий на кнопки. Проведем индукцию по  $n$ , где  $n$  — число лампочек. При  $n = 1$  утверждение задачи очевидно.

Пусть для  $n - 1$  лампочки мы это уже доказали. Докажем утверждение для  $n$  лампочек. По предположению индукции, мы можем погасить их все, кроме, быть может, любой наперед заданной лампочки. Обозначим необходимый для этого набор кнопок через  $S_i$ , где  $i$  — номер лампочки, которая, быть может, останется гореть. Если какой-то  $S_i$  приводит к тому, что все лампочки погашены, то все доказано. Иначе после применения  $S_i$  горит в точности  $i$ -ая лампочка.

По условию найдется кнопка  $T$ , соединенная с нечетным числом лампочек. Пусть это лампочки с номерами  $i_1, \dots, i_{2k-1}$ . Нетрудно видеть, что нажатие всех кнопок из  $S_{i_1}$  и  $S_{i_2}$  (если кнопка входит в  $S_{i_1}$  и в  $S_{i_2}$ , то она нажимается 2 раза или вообще не нажимается, что то же самое) приводит к тому, что изменяется состояние лампочек с номерами  $i$  и  $j$ .

Нажмем кнопки из  $S_{i_1}$ ; горит в точности  $i_1$ -я лампочка. Если теперь нажать кнопки из  $S_{i_2}$  и  $S_{i_3}$ , затем из  $S_{i_4}$  и  $S_{i_5}$ , и так далее, то будут гореть в точности лампочки, с которыми соединена кнопка  $T$ . Теперь нажмем кнопку  $T$  — все лампочки погашены, что и требовалось.

11 класс

1.  $(x + y - z) + (x - y + z) = 2x$ , откуда  $|x + y - z|/2 + |x - y + z|/2 \geq |x|$ , поскольку модуль суммы не превосходит сумму модулей. Наложим аналогичные неравенства для  $y$  и  $z$  и сложим их.

2. а) Можно. Покрасим ребра нижнего основания по кругу: 1-е в первый цвет, 2-е во второй, 3-е в третий, 4-е опять в первый и т.д. (1995 делится на 3, поэтому цепочка замкнется). Каждое ребро верхнего основания покрасим в цвет ребра нижнего основания, находящегося под ним. Каждое боковое ребро, выходящее из вершины, где сходятся два цвета, покрасим в недостающий там цвет. Докажем, что во всех боковых гранях присутствуют все 3 цвета. Возьмем ребро основания. В основа-

нии к нему с разных сторон примыкают ребра разного цвета, следовательно, и боковые ребра разного цвета, поэтому на этой грани есть все 3 цвета. Выполнение остальных требований задачи очевидно.

6) Нельзя. Пусть призма покрашена требуемым образом; тогда в основании есть 3 ребра 3-х цветов, идущие подряд (если таких нет и первое ребро, скажем, 1-го цвета, а 2-е — 2-го, то 3-е может быть только 1-го цвета, 4-е только 2-го и так далее, т.е. 3-го цвета в основании нет). Пусть 1-е ребро 1-го цвета, 2-е — 2-го и 3-е — 3-го. Тогда из вершины 1-2 выходит боковое ребро цвета 3 (разные цвета в каждой вершине), из вершины 2-3 — цвета 1, тогда ребро 2 верхнего основания — 2-го цвета (так как не 1-го и не 3-го), тогда ребро 3 — цвета 3 (разные цвета в каждой вершине), тогда боковое ребро вершины 3-4 — цвета 2 (3 цвета в каждой грани), тогда ребра 4 верхнего и нижнего основания цвета 1 (разные ребра в каждой вершине). Повторяя это рассуждение для следующих ребер (2-3-4, 3-4-5 и так далее), получим, что нижняя грань покрашена с периодом 3 (как в пункте а)), но 1996 не делится на 3, поэтому цепочка не замкнется.

3. Обозначим векторы  $\vec{AB}$  и  $\vec{AC}$  через  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  соответственно, тогда  $AA_1 = (\vec{b} + \vec{c})/2$ ;  $AA_2 = (\vec{b}|\vec{c}| + \vec{c}|\vec{b}|)/(|\vec{b}| + |\vec{c}|)$ ;

$AK/AA_1 = A_2C/AA_1 = 2|\vec{c}|/(|\vec{b}| + |\vec{c}|)$ , поскольку  $A_2K \parallel CA_1$ , и, следовательно,  $AK = |\vec{c}| \cdot (\vec{b} + \vec{c})/(|\vec{b}| + |\vec{c}|)$ . Тогда вектор  $\vec{CK} = \vec{b} \cdot |\vec{c}|/(|\vec{b}| + |\vec{c}|) - \vec{c} \cdot |\vec{b}|/(|\vec{b}| + |\vec{c}|)$ . Теперь легко убедиться, что скалярное произведение векторов  $\vec{CK}$  и  $AA_2$  равно нулю, поэтому они перпендикулярны.

4. Решение этой задачи (задача M1505 из «Задачника «Кванта») будет опубликовано позже.

5\*. Очевидно, что если все куски последовательности  $B$  длины 1996 содержатся в  $A$ , то  $B$  периодична (у всех таких кусков в  $A$  первый символ такой же, как и последний). Тогда если все куски длинами 1995 содержатся в  $A$ , то  $B$  периодична, так как тогда кусок длиной 1994 однозначно продолжается до куска длиной 1995 (иначе в  $B$  есть два разных куска длинами 1995 с одинаковыми первыми 1994 буквами, но это сдвиги периода последовательности  $A$ , значит, наборы знаков в них совпадают, поэтому по одному знаку они отличаться не могут), следовательно, кусок длиной 1995 в  $B$  однозначно (так же, как в  $A$ !) продолжается до куска длиной 1996, и  $B$  периодична по доказанному выше. Если же в  $A$  содержатся только куски не длиннее 1994, то  $B$  может быть непериодичной (период  $A$  — одна единица и 1994 нуля,  $B$  — любая последовательность, где единица больше, чем на расстоянии 1994 символа, остальные — нули).

6\*. Решение этой задачи (задача M1510 из «Задачника «Кванта») будет опубликовано позже.

7\*. Возьмем 6 параллелепипедов, у которых два ребра равны 1, а третье — достаточно большое (что это значит, станет ясно ниже). Поместим их так: у всех их ребра параллельны осям координат, причем у первых двух длинная ось параллельна оси  $Ox$ , у 3-го и 4-го — оси  $Oy$ , у 5-го и 6-го — оси  $Oz$ , параллелепипеды каждой пары получают друг из друга параллельным переносом вдоль короткого ребра на расстояние, чуть больше 1 (1-я пара — вдоль оси  $Oy$ , 2-я — вдоль оси  $Oz$ , 3-я — вдоль оси  $Ox$ ), и 1-я пара находится между первой. Получится пространственный «крест»; его центр симметричен ему не принадлежит, из него не видно концов параллелепипедов (если они достаточно длинные), поэтому в областях, которые не видны, можно перекинуть «мосты», соединив параллелепипеды в многогранник.

Избранные задачи Московской физической олимпиады

9 класс

1.  $h = \frac{1}{2} L \sin \alpha \cdot \sqrt{\frac{3\rho_1 + \rho_2}{\rho_0}} = 70,7 \text{ см}$  (здесь  $\rho_0 = 1 \text{ г/см}^3$  — плотность воды).

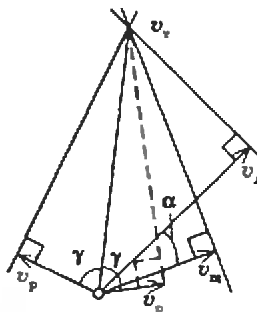


Рис. 16

которое будет опубликовано позже.

$$5. F = m \left( g + \frac{2v^2 h}{R^2 + L^2 - r^2 - h^2} \right).$$

6.  $\Delta T = \frac{2m^2 z^2 F^2 \rho L}{A^2 b h C t}$  (здесь  $z$  — валентность меди,  $F$  — постоянная Фарадея).

11 класс

1. См. решение задачи Ф1513, которое будет опубликовано позже. 2.  $T = \frac{2\pi l}{\sqrt{gh}}$ . 3. См. решение задачи Ф1510, которое будет опубликовано позже.

2.  $\gamma = \arccos \frac{\sin \alpha}{2\sqrt{5} - 4 \cos \alpha}$  (см. рис. 16, на котором указаны два возможных направления скорости рака).

10 класс

1. Примерно 40 раз.

$$2. \frac{NA}{MR} < 2\pi g \sin \alpha.$$

$$3. Q = \left( \left( \frac{5}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \rho_1 + \frac{\pi}{4} \rho_2 \right) (V_2 - V_1).$$

4. См. решение задачи Ф1509,

# КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов,  
А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

К.И.Кобзев, Д.А.Крымов,  
В.М.Митурич-Хлебникова,  
Л.А.Тишков, П.И.Чернуский

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ОТВЕТСТВЕННЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Л.А.Панюшкина

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ

Е.В.Самойлова

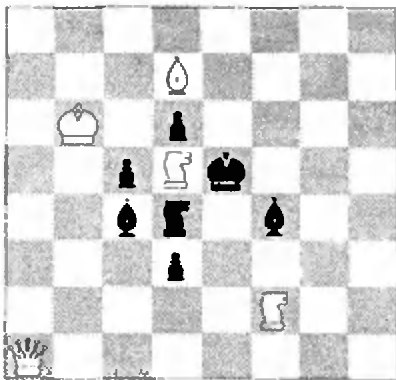
Адрес редакции:

103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «Квант»,  
тел. 250-33-54, 251-55-57

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховском полиграфическом комбинате  
Комитета Российской Федерации по печати  
142300 г. Чехов Московской области  
Заказ № 978

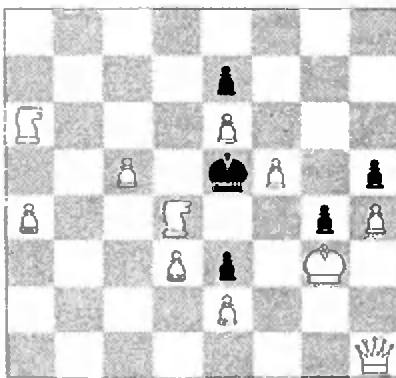
**Большие маневры**

В предыдущем выпуске шахматной странички рассказывалось о проделках юркого коня, который привозил свою команду к цели, проскакав по круговому маршруту. Естественно, что замкнутые узоры на доске доступны и другим фигурам, тем более самой могучей. Особенно популярны так называемые большие маневры ферзя, когда он последовательно обходит все угловые клетки доски.



Я.Добруский  
Мат в 4 хода

1. Фa8! с угрозой 2. Фe8+ Кe6 3. Ф : e6.  
1...Кe6 2. Фh8+! Kg7 (2...Кр : d5 3. Сe6X) 3. Фh1! С : d5 (защищаясь от 4. Фe4X) 4. Фa1X! с правильным матом. Еще одним чистым и экономичным финалом завершается вариант 1...Сg5. 2. Kg4+ Крe4. 3. Kff6+ Крf4 4. Kh5X.

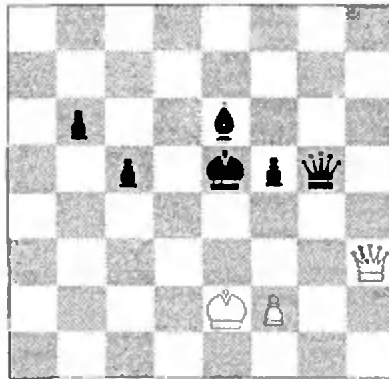


Г.Шульц  
Мат в 4 хода

В данной задаче та же идея, но ферзь в ней совершает перекрестные движения:

1. Фa8! Кр : d4 2. Фh8+ Крd5 3. Фa1 Крe6 4. Фh1X.

Много поработали над большими маневрами ферзя и этюдисты.

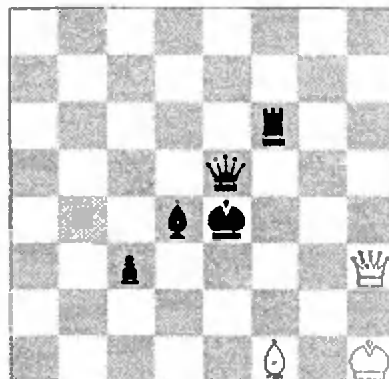


Г.Ринк  
Ничья

Здесь совместно перемещаются по кругу ферзь и король.

1. f4+! Ф : f4 (1...Кр : f4 2. Фe3+ Крg4 3. Фf3+ Крh4 4. Фh1+ Крg3 5. Фg1+ Крh4 6. Фh1+) 2. Фh8+ Крd5 3. Фa8+ Крd4 (3...Крe4 4. Фa4+, 3...Крd6 4. Фb8+) 4. Фa1+ Крe4 5. Фh1+ Крe5 6. Фh8+ Крe4 7. Фh1+ Крd4 8. Фa1+.

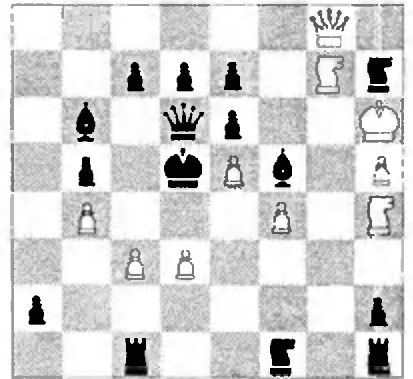
Разумеется, ферзь может путешествовать не только по углам квадрата. Он в состоянии начертить и другие геометрические фигуры. В следующем примере забавные маршруты тех же действующих лиц — ферзя и короля, образуют два концентрических восьмиугольника.



А.Эриксон  
Ничья

1. Сg2+ Крf4 2. Фh4+ Крf5 (2...Крe3 3. Фe1+ Крd3 4. Фd1+ и т.д.) 3. Фh5+ Крe6 4. Фe8+ Крd6 5. Фd8+ Крe5 6. Фa5+

Крe4 7. Фa4+ Крd3 8. Фd1+ Крe3 9. Фe1+ Крf4 10. Фh4+.

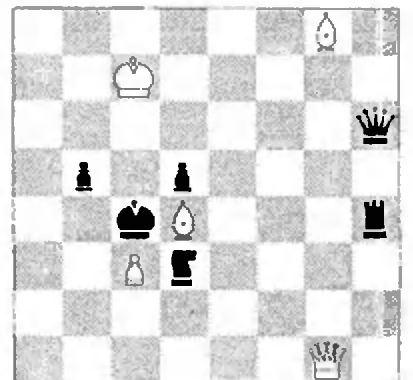


Я.Гуль  
Мат в 10 ходов

В рассмотренных этюдах ферзь вечно преследовал короля, а в задачах пробегал только один круг. Игключением является следующая задача, в которой ферзь дважды совершает «круг почта».

1. Фa8+ Фe6 2. Ф : a2+ Фe4 3. Kg : f5 e f. и вращение продолжается 4. Фg2+ Фe4 5. Фg8+ e6 6. Фa8+ e6 7. Фa2+ Фe4 8. Фg2+ Фe4, и снова 9. К : f5 e f 10. Фg8X, завершая второй виток.

И в заключение один пример из практики, в котором ферзь побывал на интересной прогулке — проиел по всем сторонам квадрата g8 — a8 — a2 — g2.



Скобелев—Стемпелин  
Ход черных

Черные не почувствовали опасности и бесечно сыграли 1...Ле4. Последовало 2. С : d5+! Кр : d5 3. Фg8+, после чего пришлось сложить оружие: 3...Ле6 4. Фg2+ Ле4 5. Фa2X или 3...Фe6 4. Фa8+ Крe4 5. Фa2X.



Уважаемые читатели журнала «КВАНТ».

Мы надеемся, что вы не забыли о нашем журнале и своевременно оформили подписку на него на второе полугодие 1995 года. Если же по каким-то причинам этого не произошло, не расстраивайтесь — вы сможете подписаться на журнал и в помещении редакции. Это избавит вас от возможных недоразумений, связанных с доставкой через почту.

В редакции можно также приобрести журналы «КВАНТ» и Приложения к ним за прошлые годы.

Наш адрес: 103006 Москва, К-6, ул. 1-я Тверская-Ямская, 2/1, «КВАНТ»  
 тел. 250-33-54, 251-55-57.

Мы ждем вас ежедневно с понедельника по пятницу с 11 до 17 часов.  
 Звоните и приходите!

